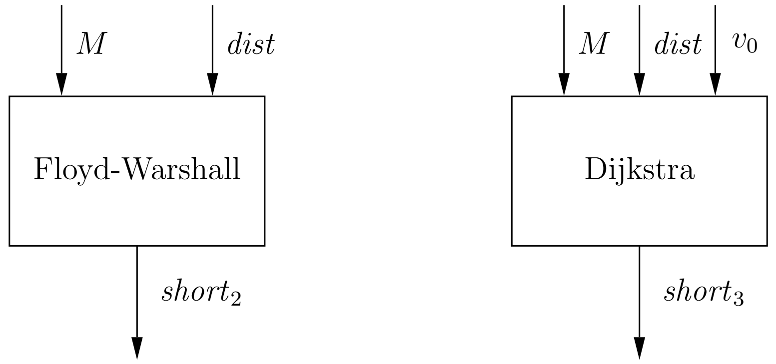
Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Caro von Totth
Studiengang Informatik
Universität Bremen

24.11.2005

Algorithmen auf Graphen (WS 2005/2006)

2. Übungsblatt: Kürzeste Wege

Mit den Algorithmen von Floyd/Warshall und Dijkstra liegen zwei gut (korrekt und schnell) funktionierende Verfahren vor, die Entfernung kürzester Wege in gerichteten Graphen zu berechnen.



Mit diesem Übungsblatt wird sich herausstellen, dass beide eingesetzt werden können, um weitere Probleme zu lösen. Dazu kann man sowohl die Ergebnisse der Algorithmen weiterverarbeiten als auch mit anderen Eingaben beginnen und die so transformieren, dass einer der beiden Algorithmen anwendbar wird.

Solche Vor- und Nachverarbeitungen sollen konstruiert werden, um folgende Funktionen zu berechnen:

1. $\mathit{short}_4(v, v') = \min\{\mathit{dist}(p) \mid p \in \mathit{PATH}_G(v, v')\}$ für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer Entfernungsfunktion $\mathrm{dist} : E \to \mathbb{N}$.

2. $\mathit{reachable} : V \times V \to \mathrm{BOOL}$ mit $\mathit{reachable}(v, v') = (\mathit{PATH}_M(v, v') \neq \emptyset)$ für einen einfachen gerichteten Graphen $M = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$

3. wie 2. für ungerichtete Graphen $G = (V, E)$

4. $\mathit{connected}(G) = \mathrm{TRUE}$, falls je zwei Knoten des ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ durch Wege verbunden sind, $\mathit{connected}(G) = \mathrm{FALSE}$ sonst,

5. $short_5(v, v') = \min\{length(p) \mid p \in PATH_M(v, v')\}$ für einen einfachen gerichteten Graphen $M = (V, E)$,

6. $M_* = (V, E_*)$ für einen einfachen gerichteten Graphen $M = (V, E)$ mit $(v, v') \in E_*$ genau dann, wenn $PATH_M(v, v') \neq \emptyset$ (M_* wird *transitiver Abschluss* von M genannt).

Die Vor- und Nacharbeiten sollen so gemacht werden, dass sie mit den beiden gegebenen Algorithmen die gestellten Probleme algorithmisch lösen und der Gesamtaufwand der Algorithmen nie größer als kubisch wird. Für die Algorithmen in 3. und 4. ist sogar quadratischer Aufwand anzustreben. Für einen der sechs Algorithmen soll die Korrektheit bewiesen werden.

Werden die Lösungen sorgfältig und richtig als beschreibender Text angegeben, gibt es dafür pro Aufgabe 10 Punkte. Kommt dazu auch eine richtige formale Konstruktion, wird diese mit zusätzlichen 5 Punkten pro Aufgabe bewertet. Für den Korrektheitsbeweis gibt es 20 Punkte. Werden die Aufgaben 3. und 4. mit quadratischem Aufwand gelöst, gibt es dafür weitere 10 Punkte.

Extraaufgabe:

Zeige, dass 4 Farben auf dem Torus nicht genug sind (zum Färben von Graphen).

Diese Aufgabe kann den Korrektheitsbeweis ersetzen.

Abgabetermin: 08.12.2005 **Dieses Aufgabenblatt wurde bearbeitet von:**