Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Caro von Totth
Studiengang Informatik
Universität Bremen

19.01.2006

Algorithmen auf Graphen (WS 2005/2006)

4. Übungsblatt: Entscheidungsprobleme

Die folgenden Aufgaben stammen aus der Theorie der NP-Vollständigkeit, wobei vor allem der Reduktionsbegriff geübt wird. Es werden ungerichtete Graphen behandelt. Es darf davon ausgegangen werden, dass alle behandelten Entscheidungsprobleme in NP liegen.

1. HAM bezeichnet das Problem, ob in einem gegebenen Graphen ein Hamiltonscher Kreis existiert (oder nicht). Unter einem *Hamiltonschen Kreis* versteht man dabei einen einfachen Kreis (bei dem also neben Start und Ziel kein Knoten zweimal besucht wird), dessen Länge die Knotenzahl ist. Mit HAMPATH wird das analoge Problem bezeichnet, bei dem es um die Existenz eines *Hamiltonschen Weges* geht, eines einfachen Weges also, dessen Länge um Eins kleiner als die Knotenzahl ist. Gibt man dabei neben dem Graphen noch Start- und Zielknoten vor, so wird das Problem *spezielles Hamiltonscher-Weg-Problem* genannt und mit $\mathrm{HAMPATH}_{\mathrm{special}}$ bezeichnet.

   (a) Zeige, dass sich HAMPATH auf $\mathrm{HAMPATH}_{\mathrm{special}}$ reduzieren lässt, d.h.

   $$\mathrm{HAMPATH} \leq \mathrm{HAMPATH}_{\mathrm{special}}.$$

   (b) Sei G ein Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten $A \neq B$. Sei G_{AB} der Graph, der entsteht, wenn man $\{A, B\}$ als Kante zu G hinzunimmt. Diese Konstruktion wird *bridge* genannt. Zeige, dass *bridge* keine Reduktion von $\mathrm{HAMPATH}_{\mathrm{special}}$ auf HAM ist.

   (c) Zeige, dass sich (dennoch) $\mathrm{HAMPATH}_{\mathrm{special}}$ auf HAM reduzieren lässt, d.h.

   $$\mathrm{HAMPATH}_{\mathrm{special}} \leq \mathrm{HAM}.$$

2. Das *Traveling-Salesman-Problem* (TSP) fragt für einen Graphen, eine Entfernungsfunktion und eine natürliche Zahl, ob es einen Hamiltonschen Kreis gibt, dessen Entfernung die gegebene Zahl nicht übersteigt. Zeige, dass sich HAM auf TSP reduzieren lässt, d.h.

   $$\mathrm{HAM} \leq \mathrm{TSP}.$$

3. Beim *vollständigen Traveling-Salesman-Problem* ($\mathrm{TSP}_{\mathrm{complete}}$) ist der vorgegebene Graph vollständig; sonst ist alles wie bei TSP. Zeige

   $$\mathrm{TSP} \leq \mathrm{TSP}_{\mathrm{complete}}.$$

14 Tage Bearbeitungszeit – Abgabe bitte bis 02.02.2006.