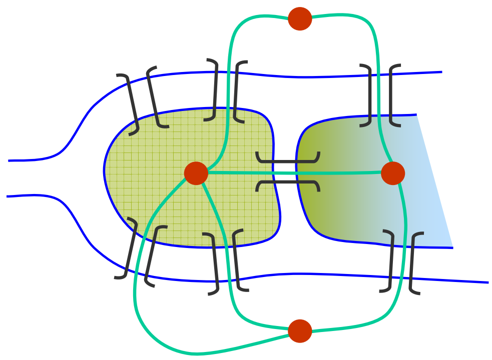
Königsberger Brückenproblem (Euler 1736)



- gegeben ein ungerichteter Graph[1)], gibt es einen Kreis (Rundweg), der jede Kante genau einmal durchläuft?
- wenn JA, wird der Graph Eulersch genannt

1) Mehrfachkanten erlaubt, Schleifen verboten

ungerichteter Graph

$$G = (V,\ \ E,\ \ att : E \to \binom{V}{2})$$

Name

endliche Menge von Knoten

endliche Menge von Kanten

Abb., die Aufhängung heißt

Menge aller 2-elementigen Teilmengen von V (lies: V über 2)

- $v \in att(e)$ inzident mit e
- $att(e) = \{v, v'\} : v$ und v' adjazent
- graphische Darstellung:
  - Knoten als dicke Punkte o.ä.
  - Kanten als Linien

Wege und Eulersche Kreise

gegeben $G = (V, E, att)$

- Weg von v nach $v': v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_n v_n$ mit $v = v_0, v' = v_n$ und $att(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ für $i = 1, \ldots, n$ (leerer Weg für $n = 0$)
- Kreis (durch v): Weg von v nach v mit $e_i \neq e_{i+1}$, $e_1 \neq e_n$ für $i = 1, \ldots, n-1$ sowie $n \neq 0$
- Eulerscher Kreis: Kreis mit $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ und $\{e_1, \ldots, e_n\} = E$
- G Eulersch, falls Eulerscher Kreis existiert
- G zusammenhängend, falls Weg von v nach v' existiert für je zwei Knoten $v, v' \in V$

einfache Lösungen (ausschöpfende Suche)

- probiere alle Permutationen der Kantenmenge
  oder
- probiere alle Wege der Länge n
  o.ä. Zahl der Kanten

Problem: exponentiell viele Möglichkeiten
(zumindest im schlechtesten Fall)

beachte: genaue Überlegungen zur Zahl der Wege später

Beobachtung

G Eulersch impliziert G gradgradig

für jeden Knoten
Zahl der inzidenten
Kanten gerade

- $\text{degree}(v) = \#\{e \in E \mid v \in att(e)\}$

  Grad — Zahl der Elemente

- G gradgradig, falls

  $\text{degree}(v) \bmod 2 = 0$ für alle $v \in V$

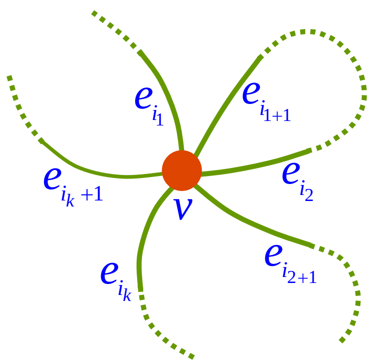
- leicht zu berechnen

Beweis(skizze)

$v_0 e_1 \cdots e_n v_n$ Eulerscher Kreis,

$v \in V$ mit $\text{degree}(v) > 0$ wird k-mal besucht

in den Schritten $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$:



d.h. $\text{degree}(v) = 2k$

ansonsten: $\text{degree}(v) = 0$

Beobachtung

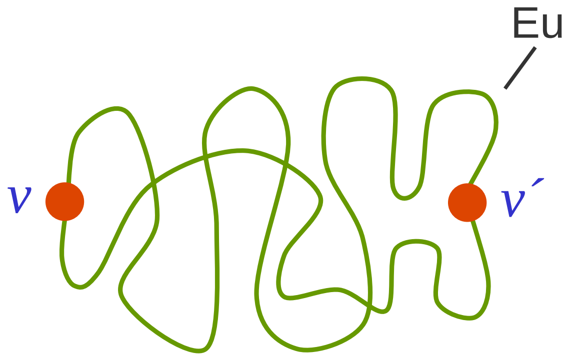
G Eulersch impliziert G^0 zusammenhängend

$\| \; (V - V_0, E, att_0)$ mit

$V_0 = \{v \in V \mid \text{degree}(v) = 0\}$ und $att_0(e) = att(e)$ f.a. $e \in E$

(Beseitigung isolierter Knoten)

Beweis(skizze):



je zwei Knoten auf einem Kreis sind durch mindestens 2 Wege (Kreishälften) miteinander verbunden

Eulersch-Test

Eingabe: $G = (V, E, att)$ mit $E \neq \emptyset$

Verfahren:

(1) bestimme Grad aller Knoten

(2) bilde G^0

(3) prüfe Zusammenhang von G^0

Ausgabe: **JA**, falls G gradgradig & G^0 zush.

NEIN sonst

Aufwand: (1) $\#E$ (2) $\#V$ (3) $\#V^2$ (Bew. später)

Korrektheit: nach Beobachtungen noch zu zeigen:

G gradgradig & G^0 zush. impliziert G Eulersch

Korrektheit

- **ein Algorithmus (o.ä.) ist korrekt, wenn er tut, was er soll**

Eulersch-Test

testet Gradgradigkeit & Zusammenhang bis auf isolierte Knoten

testet Eulersch-Sein

- Korrektheit von Eulersch-Test:

  $G=(V,E,att)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G gradgradig und bis auf isolierte Knoten zusammen-hängend ist
  - wenn G Eulersch, dann G gradgradig & G^0 zush.
  - wenn G gradgradig, dann ex. Kantenüberdeckung

Eulerscher Weg

- ein Weg $v_0 e_1 \cdots e_n v_n$ ist Eulersch in G, wenn $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ und $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ und $v_0 \neq v_n$
- G besitzt genau dann Eulerschen Weg, wenn G^0 zusammenhängend ist und genau 2 Knoten ungeraden Grades besitzt.

  (Beweis & Algorithmen analog zu Eulersch)
-