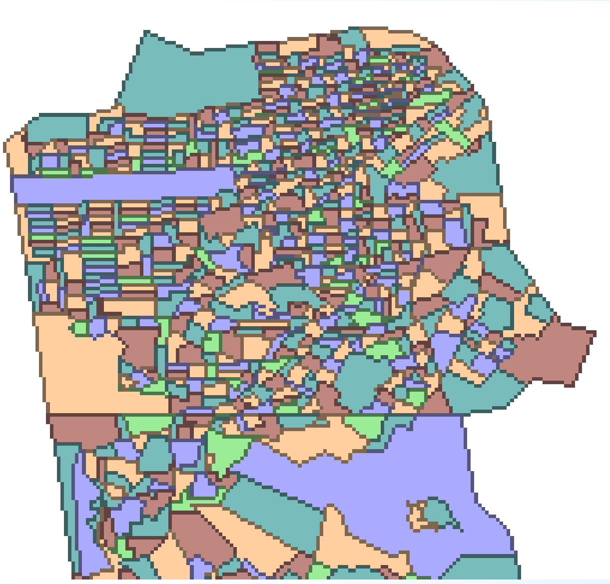
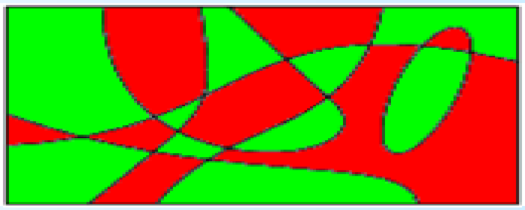
Vier-Farben-Problem



Guthrie vermutet 1852:
4 Farben sind genug
(zum Färben von Landkarten)



1695: Komplizierte Karte, vier Farben reichen...

http://www.geog.port.ac.uk/webmap/hantsmap/hantsmap/morden2/mrd2smaf.htm

...nicht ganz: „Rot“ = Rot, Orange, Rosa

1751: Vierfärbung (einfacher Fall)

http://www.murrayhudson.com/antique_maps/countries_maps/02888M.jpg

1826: Zweimal nicht aufgepasst

http://www.murrayhudson.com/antique_maps/united_states_maps/07845m.jpg

1830: es geht doch

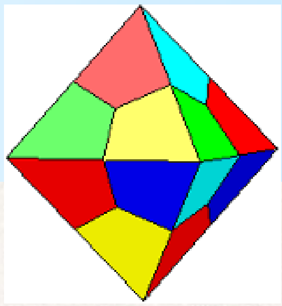
http://www.murrayhudson.com/antique_maps/united_states_maps/02196M.jpg

1846: Vierfärbung kein Problem mehr

http://www.murrayhudson.com/antique_maps/united_states_maps/04826M.jpg

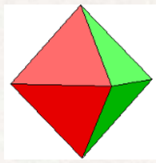
Kempes Algorithmus von 1879 zum 4-Färben planarer Graphen (Landkarten)

- rekursiv (induktiv) über Zahl der Knoten
- ein planarer Graph $G=(V,E)$ hat Punkte in der Ebene als Knoten und „durchgezogene" Linien zwischen den Aufhängungspunkten als Kanten, die sich nicht schneiden
- o. B. d. A. zusammenhängend
- verfügbare Farben: R G B W



Eulersche Polyeder-Formel

für: planaren & zusammenhängenden Graphen
$G=(V,E)$ $(\neq \emptyset)$



$$\#V + \#A - \#E - 2 = 0$$

$\#A$: Zahl der zusammenhängenden Gebiete

Beweis: Induktion über $\#E$

Korollar: G besitzt $v \in V$ mit $\mathrm{degree}(v) \leq 5$

Verfahren:

wenn $\#V \leq 4$, färbe alle verschieden; sonst

(1) wähle $v_0 \in V$ mit $\mathrm{degree}(v_0) \leq 5$
(nach Eulerscher Polyeder-Formel möglich)

(2) lösche v_0 (mit inzidenten Kanten)

(3) färbe Rest mit 4 Farben

(4) füge v_0 wieder hinzu (mit inzidenten Kanten)

(5) wenn die Nachbarn <4 Farben verbrauchen, färbe v_0 mit einer der übrigen Farben; sonst

UMFÄRBEN

Umfärben

1. Fall: 4 Nachbarn mit 4 Farben; o.B.d.A.
$c(v_1)=G$, $c(v_2)=B$, $c(v_3)=R$, $c(v_4)=W$;

2 nicht benachbart; o.B.d.A. v_2, v_4
(da K_5 nicht planar)

N steht für Netz

bilde $BWN(v_2)$ (enthält alle Knoten mit den Farben B und W, die auf Wegen von v_2 über solche Knoten erreichbar sind);
wenn $v_4 \notin BWN(v_2)$, tausche B&W in $BWN(v_2)$ (bleibt Färbung) und färbe v_0 mit B ✓
sonst bilde $RGN(v_3)$ und tausche R&G darin und färbe v_0 mit R

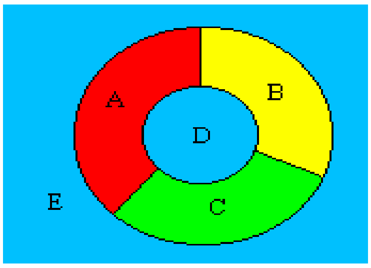
2. Fall: 5 Nachbarn mit 4 Farben
(Kempe macht für diesen Fall dieselbe Konstruktion zweimal, da 1 Farbe doppelt vorkommt)

1890 findet Heawood ein Gegenbeispiel

alle Argumente bleiben richtig, wenn man 5 Farben zulässt, weil dann die Konstruktion in Fall 1 auch für 5 Nachbarn funktioniert

Kempes Algorithmus von 1879 zum 5 ~~4~~-Färben planarer Graphen (Landkarten)

- rekursiv (induktiv) über Zahl der Knoten
- ein planarer Graph $G=(V,E)$ hat Punkte in der Ebene als Knoten und „durchgezogene" Linien zwischen den Aufhängungspunkten als Kanten, die sich nicht schneiden
- o. B. d. A. zusammenhängend
- verfügbare Farben: R G B W



Geschichte

1840 keine 5 Länder paarweise benachbart
(noch davor Eulersche Polyeder-Formel)

1852 Guthrie formuliert die 4-Farben-Hypothese

1879 5-Farben-Algorithmus von Kempe

ca. 100 Jahre weitere Arbeiten aus Europa, USA, Japan

ab 1965 mit Computer

Lösung 1976 Lösung von Appel und Haken