Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik
Universität Bremen

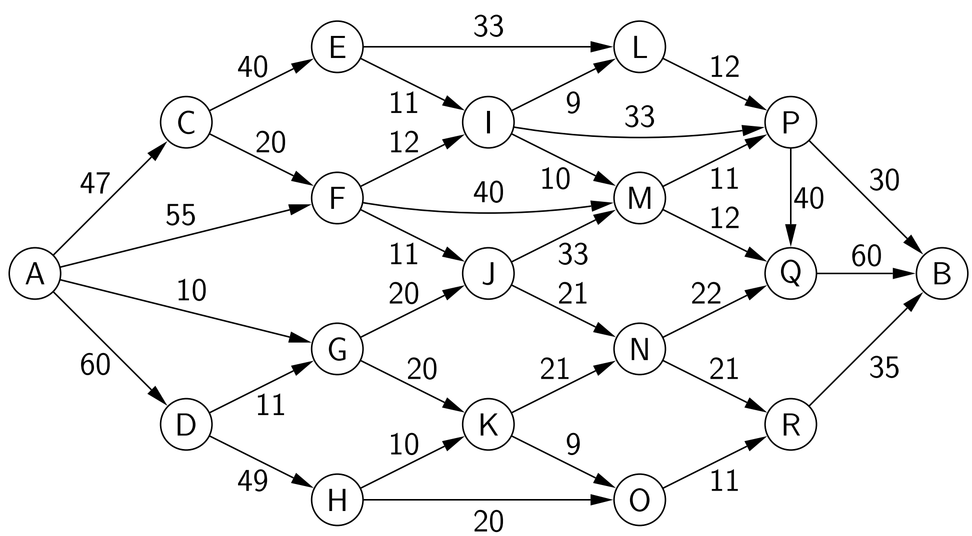
21.12.2006

Algorithmen auf Graphen (WS 2006/2007)

3. Übungsblatt: Flüsse

1. Weihnachtliche Logistik

   Der Weihnachtsmann, Santa Claus und Knecht Ruprecht haben alljährlich ein gewaltiges logistisches Problem, weil sie innerhalb weniger Stunden Unmengen von Geschenken an Kinder in vielen Teilen der Welt verteilen müssen. Das muss sorgfältig geplant werden. Eine spezielle Aufgabe besteht darin, die 2.664 Geschenke, die an der Weihnachtsgeschenkeproduktionsstätte A das Jahr über hergestellt werden, möglichst schnell zur Weihnachtsgeschenkeverteilstation B zu schaffen. Dafür steht ein Kapazitätsnetz zur Verfügung, das folgendermaßen aussieht:



   Die Kapazitäten der Kanten geben an, wieviele Geschenke innerhalb einer Stunde von den Quellen zu den Zielen transportiert werden können. Gesucht ist die Zahl der Stunden, für die das Netz in Betrieb genommen werden muss, damit alle Pakete am Sammelpunkt ankommen können. Neben dem reinen Ergebnis interessiert dabei allerdings auch, wie es erzielt werden kann.

2. Sei $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ eine Menge von Prozessoren und $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ eine Menge von Ressourcen. Sei $E \subseteq P \times R$ eine Relation, die beschreibt, welcher Prozessor auf welche Ressource zugreifen kann. Alle Ressourcen müssen exklusiv vergeben werden. Kein Prozessor kann zwei Ressourcen gleichzeitig nutzen. Eine Zuordnung $K \subseteq E$ mit dieser Eigenschaft heißt *Korrespondenz* (matching), d.h. $(p, r), (p', r') \in K$ mit $(p, r) \neq (p', r')$ impliziert $p \neq p'$ und $r \neq r'$. Schließlich bezeichne max die maximale Zahl von Kanten einer Korrespondenz.

   Betrachte nun das Kapazitätsnetz

   $$N(E) = (P \cup R \cup \{A, B\}, E \cup \{A, p) \ \mid \ p \in P\} \cup \{(r, B) \mid r \in R\}, A, B, one)$$

   mit $one(e) = 1$ für alle Kanten.

   Zeige:

   (1) Jeder Fluss $flow$ im $N(E)$ induziert durch $K(flow) = \{e \in E \ \mid \ flow(e) = 1\}$ eine Korrespondenz mit $val(flow) = \#K(flow)$.

   (2) Jede Korrespondenz K induziert einen Fluss $flow(K)$ mit $\#K = val(flow(K)$.

   Damit lässt sich max als $maxflow(N(E))$ berechnen.

3. Die Situation bleibt dieselbe wie in Aufgabe 2, aber jetzt wird untersucht, wie viele Prozessoren und Ressourcen ausfallen müssen, so dass nichts mehr korrespondiert. Eine entsprechende Teilmenge $X \subseteq P \cup R$ heißt *Knotenüberdeckung* (vertex cover), falls für alle $e = (p, r)$ $p \in X$ oder $r \in X$. Sei min die kleinste Zahl von Knoten, die eine Knotenüberdeckung bilden.

   (1) Sei (S, T) ein Schnitt in $N(E)$. Dann bilde
   $X(S, T) = \{p \in P \mid p \in T\} \cup \{r \in R \mid r \in S\} \cup \{p \in S \mid (p, r) \in E, r \in T\}$ und zeige, dass $X(S, T)$ eine Knotenüberdeckung ist.

   (2) Damit ist $min \leq mincut(N(E))$. Gilt die Gleichheit?

Bitte bis 15.01.2007 abgeben.