(1) Was ist gegeben?

- ein gerichteter Graph $M=(V,E,s,t)$, $dist: E \to \mathbb{N}$
- ein fester Anfangsknoten $v_0 \in V$

(2) Was ist gesucht?

Für jeden Knoten v aus V sucht man die kürzeste Entfernung $short_3(v)$ vom Anfangsknoten v_0 zu v. Genauer,

$$short_3(v) = \min\{ dist(p) \mid p \in PATH(v_0, v)\},\ short_3 : V \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

(3) Lösung:

- Hilfskonstruktionen
  - $dist(\bar{v}, v) = \min\{ dist(e) \mid s(e)=\bar{v}, t(e)=v\}$, $\bar{v} \in \bar{V}$, $\bar{V} \subseteq V$
  - $short_3(v, \bar{V}) = \begin{cases} short_3(v) \text{ für } v \in \bar{V} \\ \min\limits_{\bar{v} \in \bar{V}} \{ short_3(\bar{v}) + dist(\bar{v}, v)\} \text{ sonst.} \end{cases}$

- Algorithmus

(i) $short_3(v, \{v_0\}) = \begin{cases} 0 \text{ für } v = v_0 \\ dist(v_0, v) \text{ sonst.} \end{cases}$

(ii) ① Wähle $\bar{\bar{v}} \in V - \bar{V}$ mit $short_3(\bar{\bar{v}}, \bar{V}) \leq short_3(v, \bar{V})$ f.a. $v \in V - \bar{V}$

② $short_3(v, \bar{\bar{V}}) = \begin{cases} short_3(v, \bar{V}) \text{ für } v \in \bar{\bar{V}} \\ \min(short_3(v, \bar{V}), short_3(\bar{\bar{v}}, \bar{V}) + dist(\bar{\bar{v}}, v)) \text{ sonst.} \end{cases}$

für $\bar{\bar{V}} = \bar{V} \cup \{\bar{\bar{v}}\}$

BEISPIEL: Finde in einem endl. Automaten alle Zustände, die zu einem Endzustand führen.

- gegeben:

  - endlicher Automat $A = (Z, I, d, s_0, F)$ mit $d \subseteq Z \times I \times Z$, $s_0 \in Z$, $F \subseteq Z$

  - Zustandsgraph $M(A) = (Z, d, s_A, t_A)$ mit $s_A(s, x, s') = s$ und $t_A(s, x, s') = s'$

    d.h. $(s, x, s') \in d$ gdw. $s \xrightarrow{x} s'$

- gesucht: $Term(A) = \{s \in Z \mid$ es ex. Weg von s nach $s'' \in F\}$

- Verfahren: (i) $Term_0 = F$,

  (ii) $Term_{i+1} = Term_i \cup \{s \in Z \mid$ es ex. $(s, x, s') \in d$ mit $s' \in Term_i\}$

  Verfahren hält mit erstem m mit $Term_m = Term_{m+1}$.

- Um die Korrektheit (partielle Korrektheit + Termination) und Vollständigkeit des Algorithmus zu beweisen, wird folgende Behauptung aufgestellt:

$$Term(A) = Term_m$$

und in mehreren Schritten bewiesen.

(1) Termination (es gibt immer ein m)

(2) partielle Korrektheit (Alg. liefert nur richtige Ergebnisse)

(5) Vollständigkeit (Alg. liefert alle richtigen Ergebnisse)

(3) und (4): beweisen Hilfssätze für (5)