



AaG

Kürzeste Wege

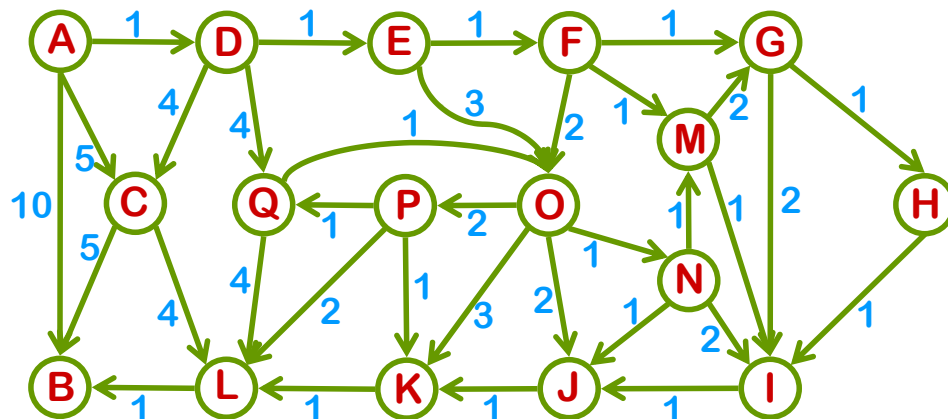
Seite 1



AaG

Kürzeste Wege

Seite 2



gesucht: kürzester Weg von **A** nach **B**



Kürzeste-Wege-Problem

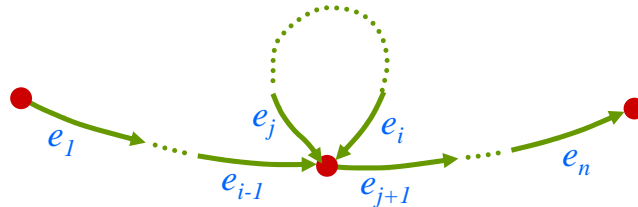
- ▶ gerichtete Graphen $G = (V, E, s, t)$ mit Entfernung $\text{dist} : E \rightarrow \mathbb{N}$
- ▶ Weg $e_1 \cdots e_n \in E^*$ von $v = s(e_1)$ nach $v' = t(e_n)$ der Länge n und Entfernung $\text{dist}(e_1 \cdots e_n) = \sum_{i=1}^n \text{dist}(e_i)$ mit $t(e_i) = s(e_{i+1})$ für $i = 1, \dots, n-1$
- ▶ Kreis, falls $v = v'$ & $n \geq 1$

gesucht: $\text{short}(v, v') = \min\{\text{dist}(p) \mid p \in \text{PATH}(v, v')\}$
 $= \min\{\text{dist}(p) \mid p \in \text{SIMPLE}(v, v')\}$

- ▶ einfach, falls kein Teilweg Kreis ist



- ▶ $p = e_1 \cdots e_n \in \text{PATH}(v, v'), c = e_i \cdots e_j \in \text{PATH}(\bar{v}, \bar{v})$ (Kreis)
 impliziert $p - c = e_1 \cdots e_{i-1} e_{j+1} \cdots e_n \in \text{PATH}(v, v')$ mit
 $\text{dist}(p - c) + \text{dist}(c) = \text{dist}(p)$



insbesondere: $\text{short}(v, v') = \text{dist}(p)$ impliziert
 $\text{short}(v, v') = \text{dist}(p - c) \ \& \ \text{dist}(c) = 0$

- ▶ **PATH** unendlich gdw. Kreis existiert
 — alle Wege



SHORTEST-PATHS 1 (short_1)

Eingabe: $M = (V, E, s, t)$ & $\text{dist} : E \rightarrow \mathbb{N}$ & $v, v' \in V$

Verfahren: (1) konstruiere $\text{SIMPLE}(v, v')$
 (2) berechne $\text{dist}(p)$ f.a. $p \in \text{SIMPLE}(v, v')$

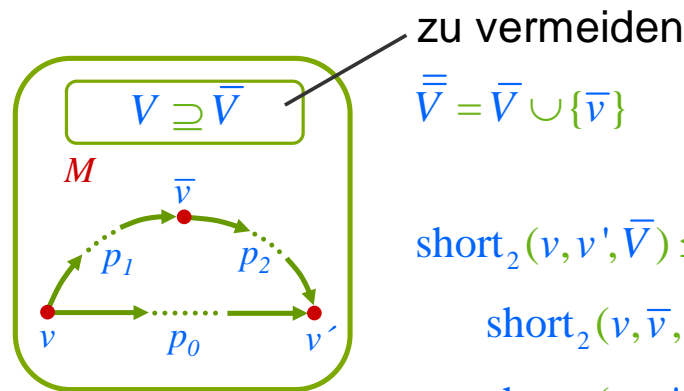
Ausgabe: Minimum von (2)

Korrektheit: $\text{short}(v, v') = \min\{\text{dist}(p) \mid p \in \text{SIMPLE}(v, v')\}$
 bereits gezeigt

Aufwand: mindestens Zahl der einfachen Wege,
 also exponentiell im schlechtesten Fall



Algorithmus nach Floyd & Warshall (1962)



$$\text{short}_2(v, v', \bar{\bar{V}}) \leq$$

$$\text{short}_2(v, \bar{v}, \bar{V}) + \text{short}_2(\bar{v}, v', \bar{\bar{V}})$$

$$\text{short}_2(v, v', \bar{\bar{V}}) \leq \text{short}_2(v, v', \bar{\bar{V}})$$

$$\text{inter}(p_1 \bullet p_2) =$$

$$\text{inter}(p_1) \cup \text{inter}(p_2) \cup \{\bar{v}\}$$

...und eins von

beiden ist =



SHORTEST-PATHS 2 (Floyd-Warshall 1962)

Eingabe: $M = (V, E, s, t)$ & $\text{dist} : E \rightarrow \mathbb{N}$

Verfahren:

(1) $\text{short}_2(v, v') = \text{short}_2(v, v', \emptyset)$

(2) $\text{short}_2(v, v, \bar{V}) = 0$

(3) $\text{short}_2(v, v', \bar{\bar{V}}) = \min(\text{short}_2(v, v', \bar{V}),$
 $\text{short}_2(v, \bar{v}, \bar{V}) + \text{short}_2(\bar{v}, v', \bar{\bar{V}}))$

für $v \neq v'$ & $\bar{\bar{V}} = \bar{V} \cup \{\bar{v}\}, \bar{v} \notin \bar{V}$

(4) $\text{short}_2(v, v', \bar{V}) = \min\{\text{dist}(e) \mid s(e) = v, t(e) = v'\}$

für $v \neq v'$

Ausgabe: $\text{short}_2 : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$



▶ Korrektheit : $\text{short}_2 = \text{short}$

▶ Aufwand : $O(n^3)$ mit $n = \#V$

kubisch

falls Mehrfachkanten verboten

$O(\max(m, n^3))$ mit $m = \#E$

allgemein

