Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski 19. Januar 2009

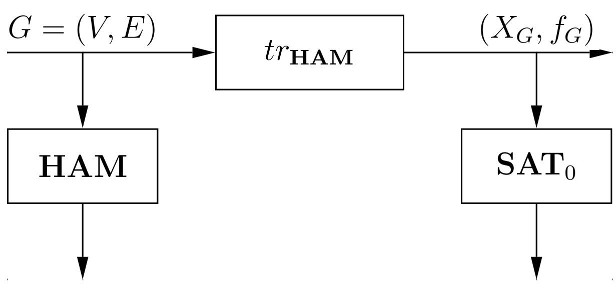
Algorithmen auf Graphen

Zweite Ergänzung Kapitel 8

Reduktion des Hamiltonschen-Kreis-Problems auf das Erfüllbarkeitsproblem

Hier wird statt mit **SAT** mit dem Erfüllbarkeitsproblem für beliebige aussagenlogische Formeln mit Negation, Konjunktion, Disjunktion und Implikation gearbeitet. Es wird mit $\mathbf{SAT}_0$ bezeichnet und ist erst recht NP-vollständig, weil Formeln in konjunktiver Normalform Spezialfälle sind.

Die NP-Vollständigkeit des Erfüllbarkeitsproblems $\mathbf{SAT}_0$ besagt, dass sich jedes NP-Problem D auf $\mathbf{SAT}_0$ reduzieren lässt. Der Beweis, auf den in dieser Lehrveranstaltung verzichtet wird, beruht darauf, eine nichtdeterministische Turing-Maschine, die D in polynomieller Zeit löst, und ihre Rechenschritte aussagenlogisch zu beschreiben. Damit dennoch ein Eindruck davon entsteht, dass und wie das funktionieren kann, wird beispielhaft das Hamiltonsche-Kreis-Problem **HAM** auf $\mathbf{SAT}_0$ reduziert.



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ vorausgesetzt werden. Dann können die Grundaussagen in X_G folgendermaßen gewählt werden:

$$X_G = \{v_{ij} \mid i, j \in [n]\} \cup \{e_{ij} \mid i, j \in [n], i \neq j\}.$$

Dabei ist $[n] = \{1, \ldots, n\}$, und die Grundaussagen drücken zum einen aus, dass bei einem Hamiltonschen Kreis jeder Knoten an jeder der n Stellen durchlaufen werden kann und zum anderen zwischen je zwei Knoten eine Kante verlaufen kann:

- v_{ij} – der Knoten v_i wird an j-ter Stelle durchlaufen,
- e_{ij} – zwischen v_i und v_j verläuft eine Kante.

Die Formel f_G beschreibt nun einerseits die Form eines Hamiltonschen Kreises für den Eingabegraphen und andererseits, welche Kanten dieser tatsächlich hat. Formal ist f_G die Konjunktion folgender Teilformeln:

(1) $v_{i1} \vee v_{i2} \vee \ldots \vee v_{in}$ für $i \in [n]$,

(2) $v_{ij} \rightarrow \neg\, v_{ik}$ für $i, j, k \in [n]$ mit $j \neq k$,

(3) $v_{ij} \rightarrow \neg\, v_{kj}$ für $i, j, k \in [n]$ mit $i \neq k$,

(4) $v_{ij} \wedge v_{k(j+1)} \rightarrow e_{ik}$ für $i, j, k \in [n]$ mit $i \neq k$ und $n + 1 = 1$,

(5) e_{ij} für $i, j \in [n], i \neq j$, falls $\{v_i, v_j\} \in E$,

(6) $\neg\, e_{ij}$ für $i, j \in [n], i \neq j$, falls $\{v_i, v_j\} \notin E$.

Punkt 1 besagt, dass jeder Knoten v_i an mindestens einer Stelle durchlaufen wird. Punkt 2 ist erfüllt, wenn jeder Knoten v_i nur an höchstens einer Stelle durchlaufen wird. Punkt 3 ist erfüllt, wenn verschiedene Knoten am verschiedenen Stellen durchlaufen werden. Zusammengenommen liefert die Erfüllung der Punkte 1 bis 3 eine Sequenz paarweise verschiedener Knoten $v_{i_1} \ldots v_{i_n}$, so dass die Aussagen in 1 bis 3 gelten, falls die $v_{i_j j}$ für $j \in [n]$ mit JA belegt werden und alle anderen v_{ik} mit NEIN. Punkt 4 verlangt, dass $e_{i_j i_{(j+1)}}$ für $j \in [n]$ gilt, da die Voraussetzungen $v_{i_j j}$ und $v_{i_{(j+1)}(j+1)}$ gelten. Das ist aber nach Punkt 5 und Punkt 6 nur der Fall, wenn $\{v_{i_j j}, v_{i_{(j+1)}(j+1)}\} \in E$. Insgesamt impliziert die Erfülltheit der Teilformeln von f_G und damit der von f_G also, dass $v_{i_1} \ldots v_{i_n}$ einen Hamiltonschen Kreis bildet, so dass gilt:

$$\mathbf{SAT}_0(X_G, f_G) = \mathbf{SAT}_0(tr_{\mathbf{HAM}}(G)) = \text{JA} \quad \text{impl.} \quad \mathbf{HAM}(G) = \text{JA}.$$

Wenn umgekehrt der Eingabegraph G einen Hamiltonschen Kreis besitzt, dann ist der durch eine Sequenz $v_{i_1} \ldots v_{i_n}$ gegeben mit $v_{i_j} \neq v_{i_k}$ für $j \neq k$ und $\{v_{i_j}, v_{i_{(j+1)}}\} \in E$ für $j \in [n]$. Insbesondere gilt auch $V = \{v_{i_j} \mid j \in [n]\}$. Betrachte nun folgende Belegung der Grundaussagen:

- $ass(v_{i_j j}) = \text{JA}$ für $j \in [n]$,
- $ass(v_{i_j k}) = \text{NEIN}$ für $j, k \in [n], j \neq k$,
- $ass(e_{ij}) = \text{JA}$ für $i, j \in [n], i = j$, falls $\{v_i, v_j\} \in E$,
- $ass(e_{ij}) = \text{NEIN}$ für $i, j \in [n], i \neq j$, falls $\{v_i, v_j\} \notin E$.

Damit sind insbesondere die Teilformeln aus den Punkten 5 und 6 der Formel f_G erfüllt und die $e_{i_j i_{(j+1)}}$ für $j \in [n]$ gelten. Da nach Definition von ass auch $v_{i_j j}$ und $v_{i_{(j+1)}(j+1)}$ gelten und in allen anderen $v_{ij} \wedge v_{k(j+1)}$ mindestens eine der beiden Teile nicht gilt, sind auch die Formeln im Punkt 4 erfüllt. Die Belegung der v_{ij} ist außerdem so gewählt, dass die Formeln in den Punkten 1 - 3 erfüllt sind, weil es für jeden Knoten genau einen Platz gibt, der mit JA belegt ist, und alle anderen Zuordnungen von Knoten und Plätzen mit NEIN belegt sind. Zusammenfassend gilt damit:

$$\mathbf{HAM}(G) = \text{JA} \quad \text{impl.} \quad \mathbf{SAT}_0(X_G, f_G) = \mathbf{SAT}_0(tr_{\mathbf{HAM}}(G)) = \text{JA},$$

so dass insgesamt die Korrektheit von $tr_{\mathbf{HAM}}$ gezeigt ist.

Darüber hinaus ist $tr_{\mathbf{HAM}}$ auch polynomiell, wie folgende Betrachtung ergibt:

- Es werden $2n^2 - n$ Grundaussagen gebildet, wobei n die Zahl der Knoten ist.
- Punkt 1 enthält n Aussagen, die je n Grundaussagen enthalten, was einem Aufwand von n^2 entspricht.
- Alle anderen Teilformeln von f_G sind konstant lang.
- In den Punkten 2 und 3 sind es je n^3, in Punkt 4 $n^3 - n$, in den Punkten 5 und 6 zusammen $n^2 - n$.

Der Übersetzungsaufwand ist also alles in allem kubisch, so dass sich

$$\mathbf{HAM} \leq \mathbf{SAT}_0$$

ergibt.