

Algorithmen auf Graphen

4. Übungsblatt

Gruppe	
--------	--

Ein Entscheidungsproblem ist eine Abbildung $D: IN \rightarrow \{JA, NEIN\}$, die jeder Eingabe aus IN eine Antwort JA oder NEIN zuordnet. Die Entscheidungsprobleme HAM, HAMPATH und $HAMPATH_{\text{special}}$ haben als Eingabemenge die ungerichteten Graphen (mit mindestens zwei Knoten), $HAMPATH_{\text{special}}$ dazu noch zwei verschiedene Knoten A und B aus dem Eingabegraphen.

- $HAM(G) = JA$ gdw. es in G einen *Hamiltonschen Kreis* gibt, d.h. einen einfachen Kreis durch alle Knoten; die Knoten (bis auf Anfang = Ende) kommen also genau einmal vor.
- $HAMPATH(G) = JA$ gdw. es in G einen *Hamiltonschen Weg* gibt, d.h. einen einfachen Weg durch alle Knoten.
- $HAMPATH_{\text{special}}(G, A, B) = JA$ gdw. es in G einen Hamiltonschen Weg von A nach B gibt; es wird also zusätzlich der Anfangs- und der Endknoten festgelegt.

Das *Traveling-Salesman-Problem* (TSP) erhält als Eingabe einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, eine Entfernungsfunktion $dist: E \rightarrow \mathbb{N}$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Die zu entscheidende Frage ist, ob es einen Hamiltonschen Kreis in G gibt, dessen Entfernung die gegebene Zahl n nicht übersteigt, d.h. $TSP(G, dist, n) = JA$ gdw. in G existiert ein Hamiltonscher Kreis K mit $dist(K) \leq n$.

Beim *vollständigen Traveling-Salesman-Problem* (TSP_{complete}) ist der eingegebene Graph vollständig (also sind je zwei verschiedene Knoten durch eine Kante verbunden); sonst ist alles wie bei TSP.

1. Wahr oder falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige ungerichtete Graphen G und ggfs. Knoten A, B in G richtig, welche falsch? Gib für jede falsche Aussage ein Gegenbeispiel an.

- Wenn $HAMPATH_{\text{special}}(G, A, B) = JA$, dann auch $HAMPATH(G) = JA$.
 richtig falsch
- Wenn $HAMPATH_{\text{special}}(G, A, B) = JA$, dann auch $HAM(G) = JA$.
 richtig falsch
- Wenn $HAMPATH(G) = JA$, dann auch $HAM(G) = JA$.
 richtig falsch
- Wenn $HAMPATH(G) = JA$, dann auch $HAMPATH_{\text{special}}(G, A, B) = JA$.
 richtig falsch
- Wenn $HAM(G) = JA$, dann auch $HAMPATH(G) = JA$.
 richtig falsch
- Wenn $HAM(G) = JA$, dann auch $HAMPATH_{\text{special}}(G, A, B) = JA$.
 richtig falsch

2. Übersetzungen zwischen Entscheidungsproblemen

- (a) Gib eine polynomielle Konstruktion an, die zu jedem ungerichteten Graphen G einen ungerichteten Graphen G' und zwei verschiedene Knoten A und B von G' festlegt, so dass gilt:

$$\text{HAMPATH}(G) = \text{JA} \text{ gdw. } \text{HAMPATH}_{\text{special}}(G', A, B) = \text{JA}.$$

- (b) Sei G ein ungerichteter Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten $A \neq B$. Sei G_{AB} der Graph, der entsteht, wenn man $\{A, B\}$ als Kante zu G hinzunimmt. Zeige, dass die folgende Aussage im Allgemeinen falsch ist:

$$\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA} \text{ gdw. } \text{HAM}(G_{AB}) = \text{JA}.$$

- (c) Gib eine polynomielle Konstruktion an, die zu jedem ungerichteten Graphen G mit zwei ausgezeichneten Knoten $A \neq B$ einen ungerichteten Graphen G'_{AB} festlegt, so dass gilt:

$$\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA} \text{ gdw. } \text{HAM}(G'_{AB}) = \text{JA}.$$

Zeige dazu auch die Korrektheit deiner Konstruktionen für (a) und (c).

3. Weitere Reduktionen

- (a) Zeige, dass sich HAM auf TSP reduzieren lässt, d.h. $\text{HAM} \leq \text{TSP}$.
- (b) Zeige, dass sich TSP auf $\text{TSP}_{\text{complete}}$ reduzieren lässt, d.h. $\text{TSP} \leq \text{TSP}_{\text{complete}}$.