Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Theoretische Informatik
Universität Bremen

20. Oktober 2009

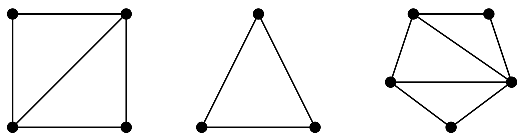
Algorithmen auf Graphen

1. Übungsblatt

Gruppe	

1. Ungerichtete Graphen

   (a) Füge in den aus drei Komponenten bestehenden Graphen

   drei Kanten ein, so dass der Ergebnisgraph Eulersch ist.

   (b) Von den folgenden Aussagen für alle ungerichteten Graphen ist nur eine richtig. Welche sind falsch, welche ist richtig? Gib für jede falsche Aussage ein Gegenbeispiel an. Beweise die richtige Aussage mit vollständiger Induktion über die Zahl der Kanten.

   i. Die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ist gerade. ☐ richtig ☐ falsch

   ii. Die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ist ungerade. ☐ richtig ☐ falsch

   iii. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade. ☐ richtig ☐ falsch

   iv. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist ungerade. ☐ richtig ☐ falsch

2. Ungerichtete Graphen mit Schleifen

Die bisherigen ungerichteten Graphen werden zu ungerichteten Graphen mit Schleifen, wenn man erlaubt, dass die Aufhängung jeder Kante nicht nur eine 2-elementige Teilmenge der Knotenmenge zuordnen kann, sondern auch eine 1-elementige:

$$att \colon E \to \binom{V}{1} \cup \binom{V}{2}$$

Eine Schleife, also eine Kante mit nur einem inzidenten Knoten, wird wie folgt gezeichnet:

Die Definition von Wegen, Kreisen, Eulerschen Kreisen und Zusammenhang wird für ungerichtete Graphen mit Schleifen unverändert übernommen.

(a) Definiere für ungerichtete Graphen $G = (V, E, att)$ mit Schleifen den *Grad* eines Knoten $v \in V$ so, dass der Hauptsatz über Eulersche Graphen [1] auch für diese Graphen gilt.

degree(v) :=

(b) Gib einen Beispielgraphen an, der zeigt, dass der Hauptsatz über Eulersche Graphen nicht mehr gilt, wenn man die Definition des Grades unverändert beibehält.

(c) Gib einen Beispielgraphen an, der zeigt, dass man die Schleifen bei der Definition des Grades nicht ignorieren kann, wenn der Hauptsatz über Eulersche Graphen weiterhin gelten soll.

(d) Transformiere jeden ungerichteten Graphen G mit Schleifen in einen ohne Schleifen $oS(G)$, so dass G genau dann Eulersch ist, wenn es $oS(G)$ ist.

(e) Beweise, dass die Behauptung in (d) gilt.

Abgabe bis 4. November 2009.

[1] G ist genau dann Eulersch, wenn G gradgradig und bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist.