Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik
Universität Bremen

10. November 2009

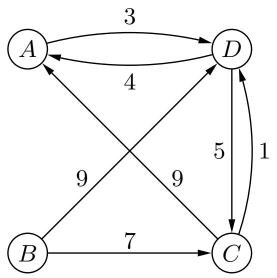
Algorithmen auf Graphen

2. Übungsblatt

Gruppe	

1. Bestimmung kürzester Wege in gerichteten Graphen

   Verwende den Algorithmus von Floyd und Warshall, um im nebenstehenden gerichteten Graphen für je zwei verschiedene Knoten v und v' die kürzeste Entfernung $short(v, v')$ zu bestimmen. Dabei sollen nacheinander die Knoten D, C, B und A als Zwischenknoten zugelassen werden. Gib dazu für jede der so entstehenden Vermeidungsmengen $\bar{V}$ einen Graphen an, in dem die Entfernung $short_2(v, v', \bar{V}) < \infty$ für alle $v, v' \in V$ mit $v \neq v'$ festgehalten ist. Bestimme außerdem für jede verbesserte Entfernung einen zugehörigen Weg, der gerade diese Entfernung hat, und gib die auf dem Weg durchlaufenen Knoten einschließlich des Anfangs- und des Endknotens an.



$short_2(v, v', \{A, B, C\})$ A D bessere Wege: B C	$short_2(v, v', \{A, B\})$ A D bessere Wege: B C
$short_2(v, v', \{A\})$ A D bessere Wege: B C	$short_2(v, v', \emptyset)$ A D bessere Wege: B C

2. Erreichbarkeit, minimale Länge, transitiver Abschluss

   Der Algorithmus von Floyd und Warshall funktioniert gut (korrekt und schnell), um die Entfernung kürzester Wege in gerichteten Graphen mit einer Entfernungsfunktion zu berechnen. Er soll nun ausgenutzt werden, um drei weitere Funktionen zu berechnen, die jeweils auf einem einfachen (d.h. es gibt keine parallelen Kanten) gerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$ arbeiten, wobei die Projektionen auf die beiden Komponenten einer Kante jeweils Quelle und Ziel definieren.

   (a) $\mathit{reachable}\colon V \times V \to \mathrm{BOOL}$ mit $\mathit{reachable}(v, v') = (\mathit{PATH}(v, v') \neq \emptyset)$ für alle $v, v' \in V$.
   (b) $\mathit{minlength}\colon V \times V \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $\mathit{minlength}(v, v') = \min\{\mathit{length}(p) \mid p \in \mathit{PATH}(v, v')\}$ für alle $v, v' \in V$.
   (c) Ausgabe $G_* = (V, E_*)$ mit $(v, v') \in E_*$ genau dann, wenn $\mathit{PATH}(v, v') \neq \emptyset$ ist für alle $v, v' \in V$.
   (G_* wird *reflexiver und transitiver Abschluss* von G genannt.)

   Dabei sind jeweils Vorarbeiten, die eine zulässige Eingabe für den Algorithmus von Floyd und Warshall erzeugen, und ggfs. Nacharbeiten zur Herstellung der gewünschten Ausgabe zu erledigen. Diese Vor- und Nacharbeiten sollen

   - in einem knappen Text beschrieben,
   - formal richtig konstruiert und
   - auf ihren Aufwand untersucht werden.

   Für die zu berechnenden Funktionen soll außerdem die Korrektheit der mit den Vor- und Nacharbeiten erhaltenen Algorithmen bewiesen werden. Dabei darf die Korrektheit des Algorithmus von Floyd und Warshall vorausgesetzt werden.

Abgabe bis 25. November 2009.