Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik
Universität Bremen

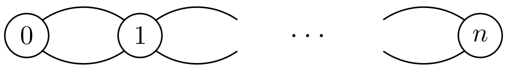
21.10.2003

# Algorithmen auf Graphen

## 1. Übungsblatt: Viele Wege und Kreise

In diesem Übungsblatt geht es um die Zahl einfacher Wege und Kreise in speziellen Graphen. Insbesondere stellt sich heraus, dass es in Relation zur Knotenzahl exponentiell viele sein können.

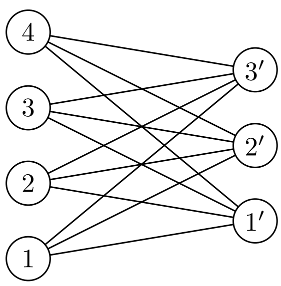
1. Betrachte die Graphen $B(n)$ für $n \geq 1$ mit den $n+1$ Knoten $0, \ldots, n$ und für $i = 1, \ldots, n$ je zwei Kanten zwischen den Knoten $i-1$ und $i$.

   $B(n)$ 
   

   Bezeichne $b(n)$ die Zahl der einfachen Wege von 0 nach $n$ in $B(n)$.

   Es soll gezeigt werden, dass $b(n) = 2^n$ gilt.

2. Betrachte die vollständigen bipartiten Graphen $K(m, n)$ mit den $m+n$ Knoten $1, \ldots, m$ und $1', \ldots, n'$ und je einer Kante zwischen $i$ und $j'$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j' = 1', \ldots, n'$. Der $K(4, 3)$ beispielsweise hat folgendes Aussehen:

Bezeichne $k(m,n,p)$ die Zahl der einfachen Wege der Länge $2p-1$, die in einem der Knoten $1,\dots,m$ beginnen. Sei ferner $m \geq n \geq 1$.

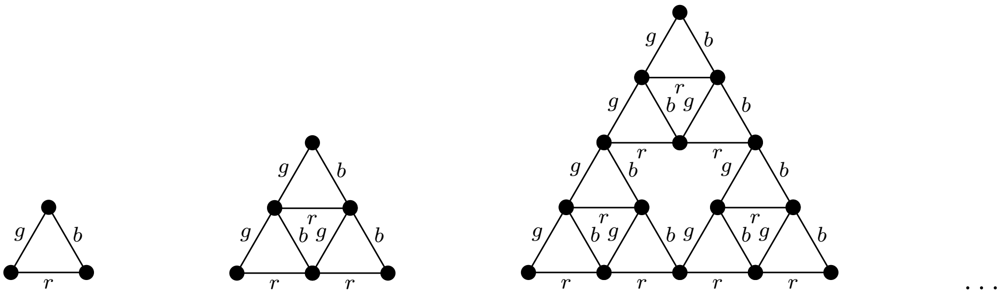
Es soll folgendes gezeigt werden:

(a) $k(m,n,1) = m \cdot n$

(b) $k(m,n,p+1) = k(m,n,p) \cdot (m-p) \cdot (n-p)$ für $1 \leq p < n$

(c) $k(m,n,p) = \binom{m}{p} \cdot \binom{n}{p} \cdot \Big(p!\Big)^2$ für $1 \leq p \leq n$

3. Betrachte die Sierpiński-Dreiecke *SIER*$(n)$, wobei *SIER*$(n+1)$ aus drei Kopien von *SIER*$(n)$ entsteht, indem die entsprechenden Ecken miteinander verklebt werden.




*SIER*(1) *SIER*(2) *SIER*(3)

Bezeichne $v(n)$ die Zahl der Knoten von *SIER*$(n)$ und *brg*$(n)$ die Zahl der einfachen Kreise, bei denen die Kanten so durchlaufen werden, dass erst nur $b$-Kanten, dann nur $r$-Kanten und schließlich nur $g$-Kanten auftreten.

(a) Zeige $v(n) = 3^n - \sum_{i=1}^{n-1} 3^i$, wobei $\sum_{i=1}^{0} 3^i = 0$ gewählt wird.

(b) Stelle eine rekursive Formel für *brg*$(n)$ auf und begründe sie.

14 Tage Bearbeitungszeit – Abgabe bitte in den Tutorien.