Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik
Universität Bremen

4.11.2003

Algorithmen auf Graphen

2. Übungsblatt: Erreichbare Knoten

Es geht um einen Algorithmus, der für jeden Knoten v_0 eines endlichen gerichteten Eingabegraphen $M = (V, E, s, t)$ die Menge aller von v_0 aus durch Wege erreichbaren Knoten berechnet, d.h. $R(v_0) = \{v \in V \mid PATH(v_0, v) \neq \emptyset\}$. Der Algorithmus, der $REACHABLE$ heißt, benutzt Knotenmengen F_i und R_i für $i \in \mathbb{N}$, die iterativ aufgebaut werden. F_i enthält die im i-ten Schritt erstmals erreichten Knoten, R_i alle bis zum i-ten Schritt erreichten:

- $F_0 = R_0 = \{v_0\}$,
- $F_{i+1} = \bigcup\limits_{v \in F_i} new(v) \quad \& \quad R_{i+1} = R_i \cup F_{i+1}$.

Die Iteration wird bis zum kleinsten m fortgesetzt, für das F_{m+1} leer ist. Die in der Iteration verwendete Menge $new(v)$ für $v \in V$ enthält alle direkten Nachbarn von v, die bis zum i-ten Schritt nicht erreicht worden sind, d.h. $new(v) = \{t(e) \mid e \in E,\ s(e) = v,\ t(e) \notin R_i\}$.

Um zu sehen, was der Algorithmus berechnet, soll folgendes gezeigt werden.

1. $R_i = \bigcup\limits_{k=0}^{i} F_k$ für alle $i \in \mathbb{N}$. (Insbesondere gilt dann: $R_i \subseteq R_j$ für $i \leq j$.)
2. Für jeden Knoten v gibt es höchstens ein i derart, dass $v \in F_i$; d.h. $F_i \cap F_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
3. Es gibt immer ein m mit $F_{m+1} = \emptyset$. (Also terminiert der Algorithmus immer und es gilt $F_{m+k} = \emptyset$ für alle $k \geq 1$.)
4. Zu jedem Knoten $v \in F_i$ gibt es einen Weg von v_0 nach v der Länge i.
5. Wenn es einen Weg von v_0 nach v der Länge i gibt und kein anderer Weg von v_0 nach v eine geringere Länge hat, dann ist $v \in F_i$.
6. $R_m = R(v_0)$. (Also ist der Algorithmus korrekt.)

Wenn man die Voraussetzung, dass V und E endliche Mengen sein sollen, fallen lässt, bleiben die Aussagen 1, 2, 4 und 5 unverändert richtig. Die Aussagen 3 und 6 werden allerdings im allgemeinen falsch.

7. Gib einen unendlichen Graphen an, für den die Aussagen 3 und 6 nicht gelten.

Eigenschaft 6 kann zu der Aussage abgeschwächt werden, dass $R(v_0) = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} R_i$.

Punkt 7 lässt sich über ein Gegenbeispiel hinaus noch wesentlich verschärfen:

8. Sei G ein gerichteter Graph mit unendlich vielen Knoten, der folgende Symmetrie-Eigenschaft besitzt: Zu jeder Kante $e \in E$ existiert eine Kante $e' \in E$ mit $s(e) = t(e')$ und $t(e) = s(e')$. Außerdem sollen alle Knoten einen endlichen Grad haben und der Graph zusammenhängend sein, d.h. wie im ungerichteten Fall, dass je zwei Knoten durch einen Weg verbunden sind.

   Dann ist $F_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. (Insbesondere besitzt G einen unendlich langen einfachen Weg.)

14 Tage Bearbeitungszeit – Abgabe bitte in den Tutorien.