Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik
Universität Bremen

20.1.2004

Algorithmen auf Graphen

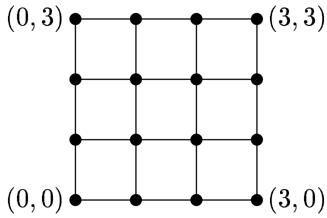
Zusatzblatt

Mit der Bearbeitung der folgenden Aufgaben können Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Lehrveranstaltung ihr “Punktekonto” aufbessern. Der Wert ist 30%, die auf die regulären Aufgabenblätter draufgeschlagen werden.

Quadratische Gitter

Unter einem quadratischen Gitter vom Grad n (kurz: n-Gitter) versteht man einen ungerichteten Graph $Grid(n) = (V_n, E_n)$, dessen Knoten die Punkte der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten zwischen 0 und n sind, d.h. $(i, j) \in V_n$, wenn $0 \leq i, j \leq n$, und dessen Kanten Knoten verbinden, die den Abstand 1 voneinander haben, d.h. $\{(i, j), (i', j')\} \in E_n$, wenn $|i - i'| + |j - j'| = 1$.

Zum Beispiel hat $Grid(3)$ folgende Form:



Bezeichne $v(n)$ die Zahl der Knoten und $e(n)$ die der Kanten von $Grid(n)$.

1. Wie können $v(n)$ und $e(n)$ berechnet werden? Beschreibe beide Größen bitte sowohl rekursiv als auch direkt durch einen arithmetischen Ausdruck.
2. Beweise die Richtigkeit der direkten Beschreibungen durch vollständige Induktion über n mit Hilfe der rekursiven.

Alle Knoten mit i als zweiter Komponente mit den Kanten zwischen ihnen bilden einen einfachen Weg, der i-te Ebene genannt wird. Da je 2 Ebenen disjunkt zueinander sind und alle Knoten in Ebenen liegen, bilden die Ebenen einen aufspannenden Teilgraphen, der ein Wald ist, weil er aus lauter disjunkten Bäumen besteht.

3. Wieviele Kanten müssen hinzukommen, um einen aufspannenden Baum zu erhalten?
4. Welche Bedingung müssen zwei Kanten, die beide in keiner Ebene liegen, erfüllen, damit sie gemeinsam in einem solchen Baum liegen können?
5. Wieviele verschiedene aufspannende Bäume können durch Hinzunahme von Kanten zu den Ebenen entstehen?

Bitte begründe deine Antworten.