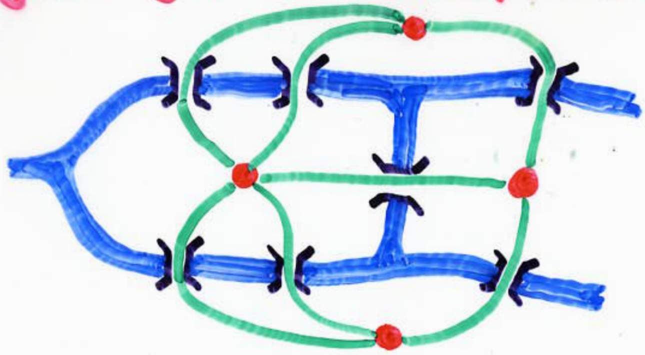
Folie 1

Königsberger Brückenproblem (Euler 1736)



- gegeben ein ungerichteter Graph,[1)] gibt es einen Kreis (Rundweg), der jede Kante genau einmal durchläuft?
- wenn JA, wird der Graph **Eulersch** genannt

---

1) Mehrfachkanten erlaubt, Schleifen verboten

Folie 2

ungerichteter Graph

$$G = \left(V,\ E,\ att: E \to \binom{V}{2}\right)$$

- G: Name
- V: endliche Menge von Knoten
- E: endliche Menge von Kanten
- att: Abb., die Aufhängung heißt
- $\binom{V}{2}$: Menge aller 2-elementigen Teilmengen von V (lies: V über 2)

- $v \in att(e)$ **inzident** mit e
- $att(e)=\{v,v'\}$: v und v' **adjazent**
- graphische Darstellung:
  - Knoten als dicke Punkte o.ä.
  - Kanten als Linien

Folie 3

Wege & Eulersche Kreise

gegeben $G = (V, E, att)$

- Weg von v nach v': $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_n v_n$ mit $v = v_0$, $v' = v_n$ & $att(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ für $i = 1, \dots, n$
- Kreis (durch v): Weg von v nach v mit $e_i \neq e_{i+1}$ und $e_1 \neq e_n$ für $i = 1, \dots, n-1$
- Eulerscher Kreis: Kreis mit $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ und $\{e_1, \dots, e_n\} = E$
- G Eulersch, falls Eulerscher Kreis ex.
- G zusammenhängend, falls Weg von v nach v' ex. für je zwei Knoten $v, v' \in V$

Folie 4

einfache Lösungen (ausschöpfende Suche)

- probiere alle Permutationen der Kantenmenge

oder

- probiere alle Wege der Länge n

o. ä.

Zahl der Kanten

Problem: exponentiell viele Möglichkeiten (zumindest im schlechtesten Fall)

beachte: genaue Überlegungen zur Zahl der Wege später

Folie 5

Beobachtung

G Eulersch impliziert G gradgradig

für jeden Knoten Zahl der inzidenten Kanten gerade

- $\text{degree}(v) = \#\{e \in E \mid v \in \text{att}(e)\}$

  Grad Zahl der Elemente

- G gradgradig, falls

  $\text{degree}(v) \bmod 2 = 0$ für alle $v \in V$

- leicht zu berechnen

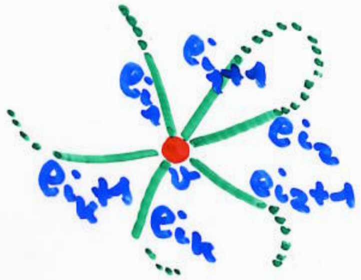
Folie 6

Beweis(skizze)

$v_0 e_1 \cdots e_n v_n$ Eulerscher Kreis,

$v \in V$ mit $\text{degree}(v) > 0$ wird k-mal besucht

in den Schritten $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$:



d.h. $\text{degree}(v) = 2k$

ansonsten: $\text{degree}(v) = 0$

Folie 7

Beobachtung

G Eulersch impliziert G° zusammenhängend

$$G^\circ = (V - V_0, E, att_0)$$

$$V_0 = \{v \in V \mid deg_G(v) = 0\}$$ mit $att_0(e) = att(e)$ f.a. $e \in E$

(Beseitigung isolierter Knoten)

Beweis(skizze):

Eulerscher Kreis

je zwei Knoten auf einem Kreis sind durch mindestens 2 Wege (Kreishälften) miteinander verbunden

Folie 8

Eulersch-Test

Eingabe: $G = (V, E, att)$ mit $E \neq \emptyset$

Verfahren:

(1) bestimme Grad aller Knoten

(2) bilde G°

(3) prüfe Zusammenhang von G°

Ausgabe: JA, falls G gradgradig & G° zush.

NEIN sonst

Aufwand: (1) $\#E$ (2) $\#V$ (3) $\#V^3$ (Bew. später)

Korrektheit: nach Beobachtungen noch zu zeigen:

G gradgradig & G° zush. impl. G Eulersch

Folie 9

Korrektheit

▷ ein Algorithmus (o.ä.) ist korrekt, wenn er tut, was er soll

Eulersch-Test — testet Gradgradigkeit & Zusammenhang bis auf isolierte Knoten — testet Eulersch-Sein

▷ Korrektheit von Eulersch-Test:

$G=(V,E,att)$ mit $E \neq \emptyset$ ist genau dann Eulersch, wenn G gradgradig und bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist

- wenn G Eulersch, dann G gradgradig & G° zush.
- wenn G gradgradig, dann ex. Kantenüberdeckung

Folie 10

Eulerscher Weg

▷ ein Weg $v_0 e_1 \cdots e_n v_n$ ist Eulersch in G, wenn $e_i \neq e_j$ für $i \neq j$ und $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ und $v_0 \neq v_n$

▷ G besitzt genau dann Eulerschen Weg, wenn G° zusammenhängend ist und genau 2 Knoten ungeraden Grades besitzt.

(Beweis & Algorithmen analog zu Eulersch)

▷