Folie 1

Kürzeste-Wege-Problem

▷ gerichtete Graphen $G=(V,E,s,t)$
mit Entfernung $dist: E \to \mathbb{N}$

▷ Weg $e_1 \cdots e_n \in E^*$ von $v=s(e_1)$ nach $v'=t(e_n)$
der Länge n & Entfernung $dist(e_1 \cdots e_n)=\sum_{i=1}^{n} dist(e_i)$
mit $t(e_i)=s(e_{i+1})$ für $i=1,\dots,n-1$

▷ Kreis, falls $v=v'$ & $n \geq 1$

gesucht: $short(v,v') = \min\{dist(p) \mid p \in \overset{\text{alle Wege}}{PATH(v,v')}\}$

$\overset{\text{Beob.}}{=} \min\{dist(p) \mid p \in \underset{\text{alle einfachen Wege}}{SIMPLE(v,v')}\}$

▷ einfach, falls kein Teilweg Kreis ist

Folie 2

SHORTEST-PATHS 1 $(short_1)$

Eingabe: $M=(V,E,s,t)$ & $dist: E \to \mathbb{N}$ & $v,v' \in V$

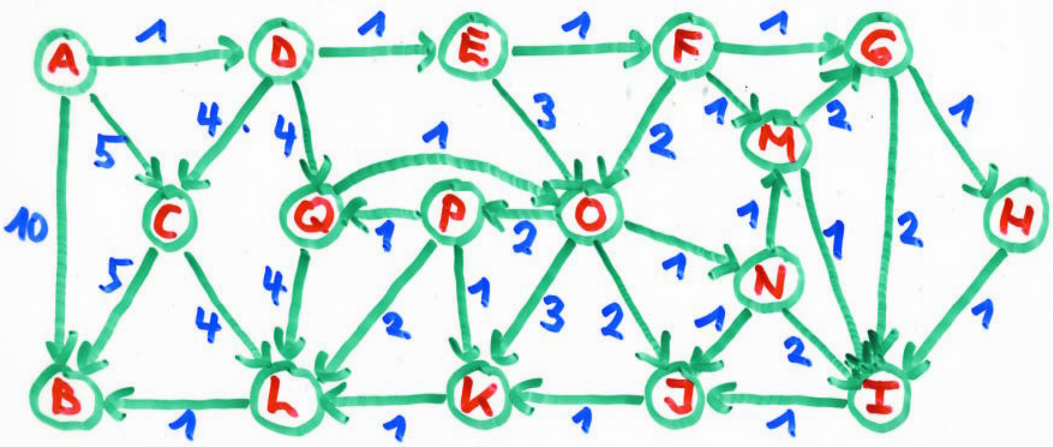
Verfahren: (1) konstruiere $SIMPLE(v,v')$
(2) berechne $dist(p)$ f.a. $p \in SIMPLE(v,v')$

Ausgabe: Minimum von (2)

Korrektheit: $short(v,v') = \min\{dist(p) \mid p \in SIMPLE(v,v')\}$
bereits gezeigt

Aufwand: mindestens Zahl der einfachen Wege,
also exponentiell im schlechtesten Fall

Folie 3



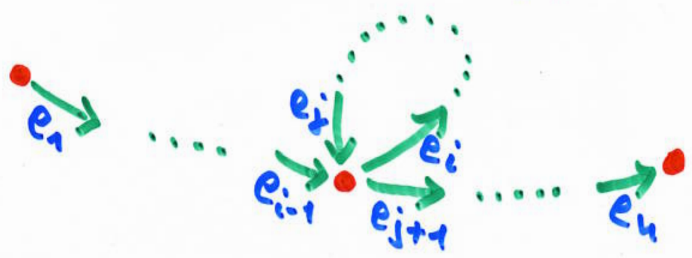
gesucht: kürzester Weg von A nach B

Folie 4

▷ $p = e_1 \cdots e_n \in PATH(v, v')$, $c = e_i \cdots e_j \in PATH(\bar{v}, \bar{v})$ (Kreis)

impliziert $p - c = e_1 \cdots e_{i-1} e_{j+1} \cdots e_n \in PATH(v, v')$

mit $dist(p-c) + dist(c) = dist(p)$

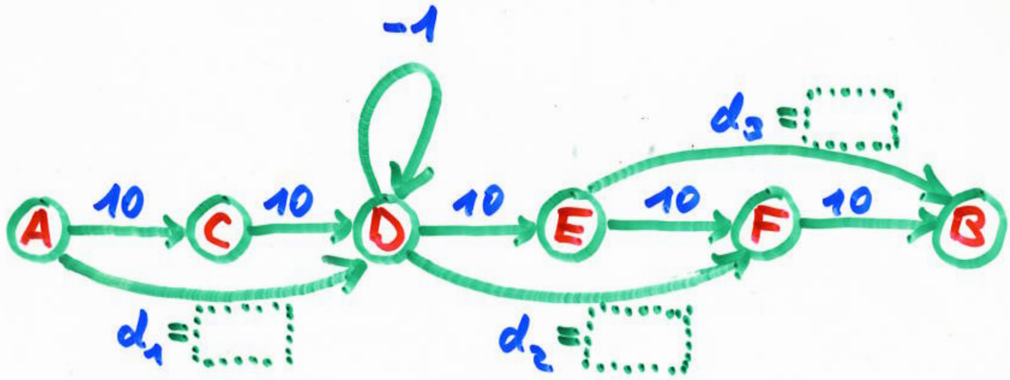


insbesondere: $short(v, v') = dist(p)$ impliziert
$short(v, v') = dist(p-c)$ & $dist(c) = 0$

▷ PATH unendlich gdw. Kreis existiert

alle Wege

Folie 5



- mein Weg von A nach B:

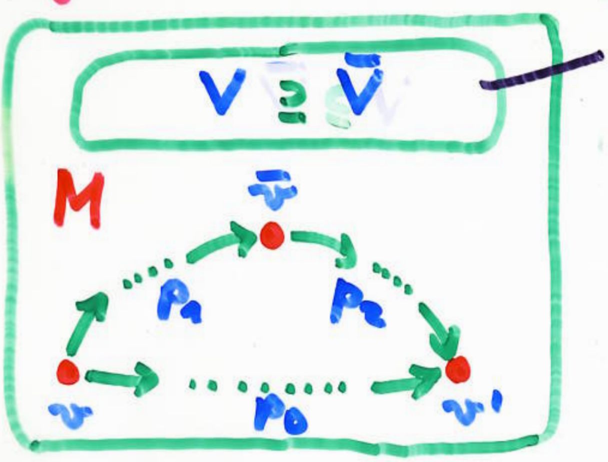
  $A \to C \to D \xrightarrow{\text{k-mal}} D \to E \to F \to B$ mit

  $k = 40 + 2 \cdot \max(|d_1|,|d_2|,|d_3|) + \#D(\text{euer W.})$

- euer Weg von A nach B:

Folie 6

Algorithmus nach Floyd & Warshall (1962)



zu vermeiden

$\bar{\bar{V}} = \bar{V} \cup \{\bar{v}\}$

$short_2(v, v', \bar{\bar{V}}) \leq short_2(v, \bar{v}, \bar{V}) + short_2(\bar{v}, v', \bar{V})$

$short_2(v, v', \bar{V}) \leq short_2(v, v', \bar{\bar{V}})$

$inter(p_1 \bullet p_2) = inter(p_1) \cup inter(p_2) \cup \{\bar{v}\}$

... und eins von beiden ist =

Folie 7

SHORTEST-PATHS-2 (Floyd-Warshall 1962)

Eingabe: $M=(V,E,s,t)$ & $dist: E \to \mathbb{N}$

Verfahren: (1) $short_2(v,v') = short_2(v,v',\emptyset)$

(2) $short_2(v,v',\bar{V}) = \min(short_2(v,v',\bar{\bar{V}}),$
$short_2(v,\bar{v},\bar{\bar{V}}) + short_2(\bar{v},v',\bar{\bar{V}}))$

für $v \neq v'$ & $\bar{\bar{V}} = \bar{V} \cup \{\bar{v}\}$, $\bar{v} \notin \bar{V}$

(3) $short_2(v,v,\bar{V}) = 0$

(4) $short_2(v,v',V) = \min\{dist(e) \mid s(e)=v, t(e)=v'\}$
für $v \neq v'$

Ausgabe: $short_2 : V \times V \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Folie 8

- Korrektheit: $short_2 = short$
- Aufwand: $O(n^3)$ mit $n = \#V$
  falls Mehrfachkanten verboten
  kubisch
  $O(\max(m, n^3))$ mit $m = \#E$
  allgemein