Folie 1

die Klasse NP

- betrifft Entscheidungsprobleme $D : \mathbb{N} \to \{JA, NEIN\}$
- $D \in NP$, falls es einen Algorithmus gibt, der in jedem Rechenschritt eine konstant (oder polynomiell) beschränkte Auswahl an Möglichkeiten hat, bei dem jede Folge von Rechenschritten polynomiell beschränkt ist und eine solche Folge für jedes $x \in \mathbb{N}$ genau dann JA liefert, wenn $D(x) = JA$

Folie 2

z.B. Färbung

$G = (V, E \subseteq \binom{V}{2}), k$

COLOR

JA falls $c : V \to \{1, \dots, k\}$
ex. mit $c(v) \neq c(v')$
für alle $\{v, v'\} \in E$

NEIN sonst

Algorithmus: (1) wähle Farbe für Knoten:
$\#V$ Schritte, k Möglichkeiten
(2) überprüfe Färbungseigenschaft
$\#E$ Schritte, 1 Möglichkeit

Folie 3

- $P \subseteq NP$ (offensichtlich)
- zu zeigen oder zu widerlegen: $NP \subseteq P$
- 1. Hilfsmittel: Reduktion

seien $D, D' \in NP$, sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ eine mit polynomiellem Aufwand berechenbare Funktion; dann ist f eine Reduktion von D auf D', falls für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$D(x) = JA \quad \text{gdw.} \quad D'(f(x)) = JA$$

- dafür kurz: $D \leq D'$

Beobachtung: $D \leq D'$ & $D' \in P$ impl. $D \in P$

'D näher an P als D''

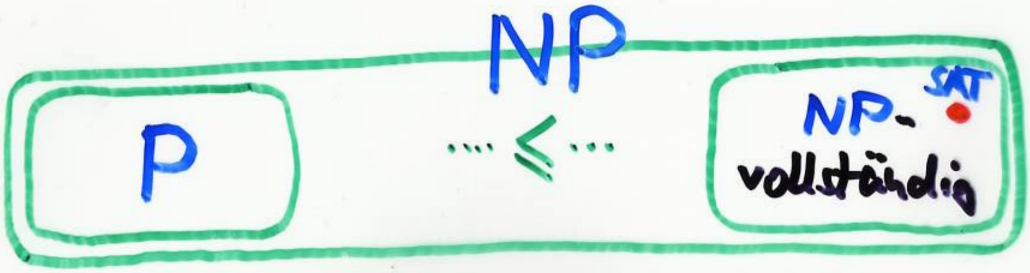
Folie 4

NP-Vollständigkeit

- $D_0 \in NP$ NP-vollständig, wenn $D \leq D_0$ für alle $D \in NP$

Theorem von Cook (1971)

SAT NP-vollständig

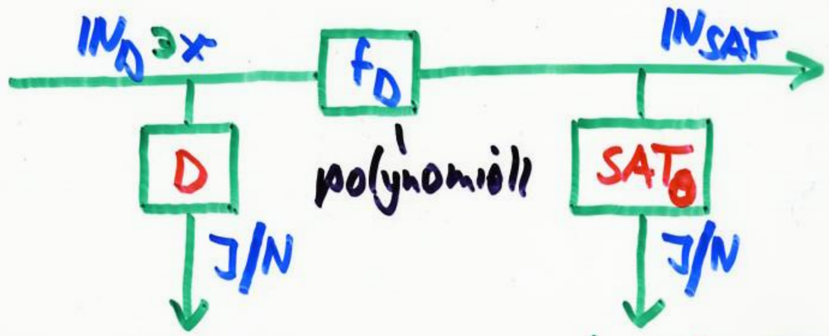


Folie 5

Theorem von Cook (1971)

Erfüllbarkeitsproblem*) ist NP-vollständig

d.h. $SAT_0 \in NP$ & f.a. $D \in NP$ gilt $D \leq SAT_0$



Korrekt: $D(x) = JA$ gdw $SAT_0(f_D(x)) = JA$

*) der Aussagenlogik

Folie 6

NP-Vollständigkeit (fortgesetzt)

▷ D_0 NP-vollständig & $D_0 \in P$ impl. $P = NP$

d.h. statt $D \in P$ f.a. $D \in NP$ zu zeigen, genügt ein NP-vollständiges D_0

▷ $D_0 \leq D_1$, $D_1 \in NP$ & D_0 NP-vollständig impl. D_1 NP-vollständig

d.h. geeignete Reduktionen liefern NP-vollständige Probleme

Folie 7

$$D \leq SAT_0 \leq SAT \leq SAT3 \leq CLIQUE$$

$D \in NP$ bel.

- $D \leq SAT_0$: Cook 1971
- $SAT_0 \leq SAT$: Umwandlung aussagenlogischer Formeln in konjunktive Normalform
- $SAT \leq SAT3$: Umwandlung konj. NF in eine mit 3 Literalen pro Klausel
- $SAT3 \leq CLIQUE$: Kapitel 7 & 9 (doppelt)

Folgerung: Wegen der Transitivität von $\leq$ sind mit SAT_0 auch SAT, $SAT3$ & $CLIQUE$ NP-vollständig

Folie 8

Ordnung in NP

$$
\begin{array}{ccccccccc}
SAT_0^{\bullet} & \leq & SAT^{\bullet} & \leq & SAT3^{\bullet} & & & & \\
 & & & & \leq & & & & \\
\text{SPANTREE-BD}^{\bullet} & & & & CLIQUE^{\bullet} & \leq\geq & INDEPENDENT^{\bullet} & \leq\geq & VERTEXCOVER^{\bullet} \\
 & \geq & & & & & & & \leq \\
 & & HAMPATH^{\bullet} & \leq\geq & & & HAMPATH_{special}^{\bullet} & \leq\geq & HAM^{\bullet} \\
 & & \leq & & & & & & \leq \\
LONGESTPATH^{\bullet} & & & & & & TSP_{complete}^{\bullet} & \geq & TSP^{\bullet}
\end{array}
$$

$\bullet$ NP-vollständig

$\leq$ laut Übungsblatt