

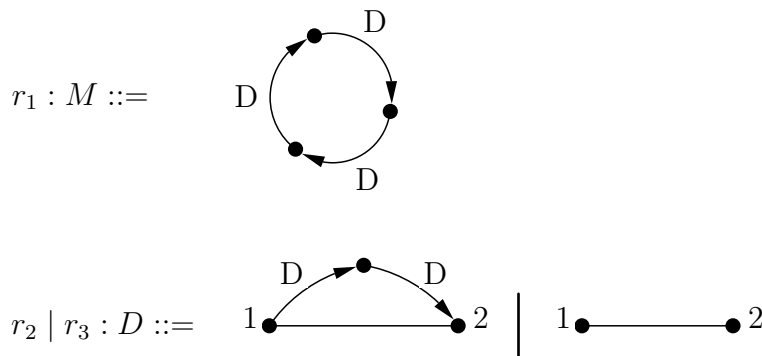
## Formale Sprachen: Graphtransformation

### 2. Übungsblatt

Gegenstand dieses Übungsblattes ist eine Hyperkantenersetzungsgrammatik, die die maximalen outer-planaren Graphen erzeugt. Solche Graphen werden kurz Möpse genannt und sind Gebilde, die so in die Ebene gelegt werden können, dass jeweils alle Knoten auf einem Außenkreis liegen und sich innerhalb des Kreises die größtmögliche Zahl an Kanten befindet, die sich nicht kreuzen. Betrachte dazu folgende Grammatik

$$G_{MOPS} = (\{D, M\}, \{*\}, \{r_1, r_2, r_3\}, M)$$

mit den Regeln



Wählt man  $D$  statt  $M$  als Startsymbol, erhält man die Grammatik  $G_{MOPS,D}$ . Die Elemente von  $L(G_{MOPS,D})$  werden Drittmöpsen genannt.

Es sollen mit Hilfe des Kontextfreiheitslemmas einige Eigenschaften von Möpsen und Drittmöpsen hergeleitet werden.

1. Für  $H \in L(G_{MOPS,D})$  gilt:

(A)  $\#E_H = 2(\#V_H - 2) + 1$ .

(B) Es gibt einen einfachen Weg  $v_1 \dots v_n$  von  $1_H$  nach  $2_H$ , auf dem alle Knoten liegen (d.h. insbesondere  $n = \#V_H, 1_H = v_1, 2_H = v_n$ ).

- (C) Für die so nummerierten Knoten gilt  $n = 2$  oder es existiert ein  $j$  mit  $1 < j < n$ , derart dass für jede Kante von  $v_i$  nach  $v_k$  mit  $i < k$  gilt: ( $i = 1$  und  $k = n$ ) oder  $k \leq j$  oder  $j \leq i$ .
- (D) Wähle  $n$  Punkte auf einem geometrischen Kreis und benenne sie der Reihe nach mit  $v_1, \dots, v_n$ , als Kanten zwischen  $v_i$  und  $v_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, n - 1$  wähle die Kreisbögen zwischen  $v_i$  und  $v_{i+1}$ , als Kanten zwischen  $v_i$  und  $v_k$  mit  $k < i + 1$  wähle die gerade Strecke zwischen  $v_i$  und  $v_k$ . Zeige, dass sich keine zwei Kanten kreuzen.

Punkt B bedeutet, dass H einen Hamiltonschen Weg besitzt. Punkt C sagt, dass die einzige Kante, die vor  $v_j$  beginnt und hinter  $v_j$  endet, die zwischen  $v_1$  und  $v_n$  ist. Punkt D zeigt, dass sich H so in die Ebene legen lässt, dass alle Knoten auf einem geometrischen Kreis liegen und alle Kanten innerhalb eines der Kreissektoren, wenn man den Kreis längs der Linie von  $v_1$  nach  $v_n$  schneidet.

2. Was ergibt sich aus Aufgabe 1 analog für Möpse?
3. Es gibt je einen Mops mit 3, 4 und 5 Knoten und 3 Möpse mit 6 Knoten. Welche Möpse gibt es mit 7 Knoten?
4. Welche der folgenden Eigenschaften gilt für  $MOPS \in L(G_{MOPS})$ ?
  - (A) Die Zahl der Dreiecke in  $MOPS$  ist  $\#V_{MOPS} - 2$ .
  - (B)  $MOPS$  ist zusammenhängend.
  - (C)  $MOPS$  ist 3-färbbar.
  - (D)  $MOPS$  ist Eulersch.
  - (E)  $MOPS$  ist Hamiltonsch.
  - (F)  $MOPS$  besitzt einen Knoten mit Grad 3, falls  $\#V_{MOPS} \geq 4$ .
  - (G)  $MOPS$  besitzt einen Knoten mit Grad 4, falls  $\#V_{MOPS} \geq 5$ .
  - (H)  $MOPS$  besitzt einen Knoten mit Grad 5, falls  $\#V_{MOPS} \geq 8$ .
5. Skizziere einen Algorithmus, der für Drittmöpfe und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  feststellt, ob sie einen Knoten des Grades  $k$  besitzen.

Abgabe bitte bis 17. Juni 2004.