# Formale Sprachen: Graphtransformation

**Hans-Jörg Kreowski**

**SS 2004**

die folgenden Folien betreffen den Arbeitsgegenstand der Lehrveranstaltung am 22. und 24. Juni sowie am 6. Juli (Bezug zu Petri-Netzen extra):

**Parallelregeln und -ableitungen**

**Parallele und sequentielle Unabhängigkeit**

**Parallelisierung und Sequentialisierung**

**Reine Nebenläufigkeit**

# Parallelität

- gleichzeitige oder gemeinsame Aktivitäten

  z.B. Parallelrechner, parallele Algorithmen, Petri-Netze, L-Systeme, CSP, zelluläre Automaten, ...

- schneller; z.B. sequentielles vs. paralleles Sort.
- mehr; z.B. kontextfrei vs. L-Systeme
  (anderes)
- gleichzeitiges Anwenden mehrerer Regeln oder einer Regel mehrmals

⇒ paralleles Ableiten, parallele Regeln

## parallele Graphtransformation (allg.)

gegeben: Menge von (atomaren) Regeln $P$

- Menge der Parallelregeln $P^+$ über $P$:

  (i) $P \subseteq P^+$

  (ii) $r_1, r_2 \in P^+$ impliziert $r_1 + r_2 \in P^+$

  (eine Regel oder mehrere Regeln, einzelne auch mehrmals; Summe kommutativ und assoziativ)

- Parallelableitung $M \overset{*}{\underset{P^+}{\Longrightarrow}} M'$

Beobachtung: $\overset{*}{\underset{P}{\Longrightarrow}} \subseteq \overset{*}{\underset{P^+}{\Longrightarrow}}$ (offensichtlich)

- und umgekehrt?

**Ansätze** (für $r_i = (L_i \supseteq K_i \subseteq R_i)$, $i=1,2$ und $r_1+r_2$)

- Ansatz $g: L_1+L_2 \to M$ von $r_1+r_2$ in $M$ impliziert Ansätze $g_i = g|_{L_i}: L_i \to M$, $i=1,2$ von $r_i$ in $M$

- Ansätze $g_i: L_i \to M$, $i=1,2$ implizieren Ansatz $\langle g_1, g_2 \rangle : L_1 + L_2 \to M$ def. durch

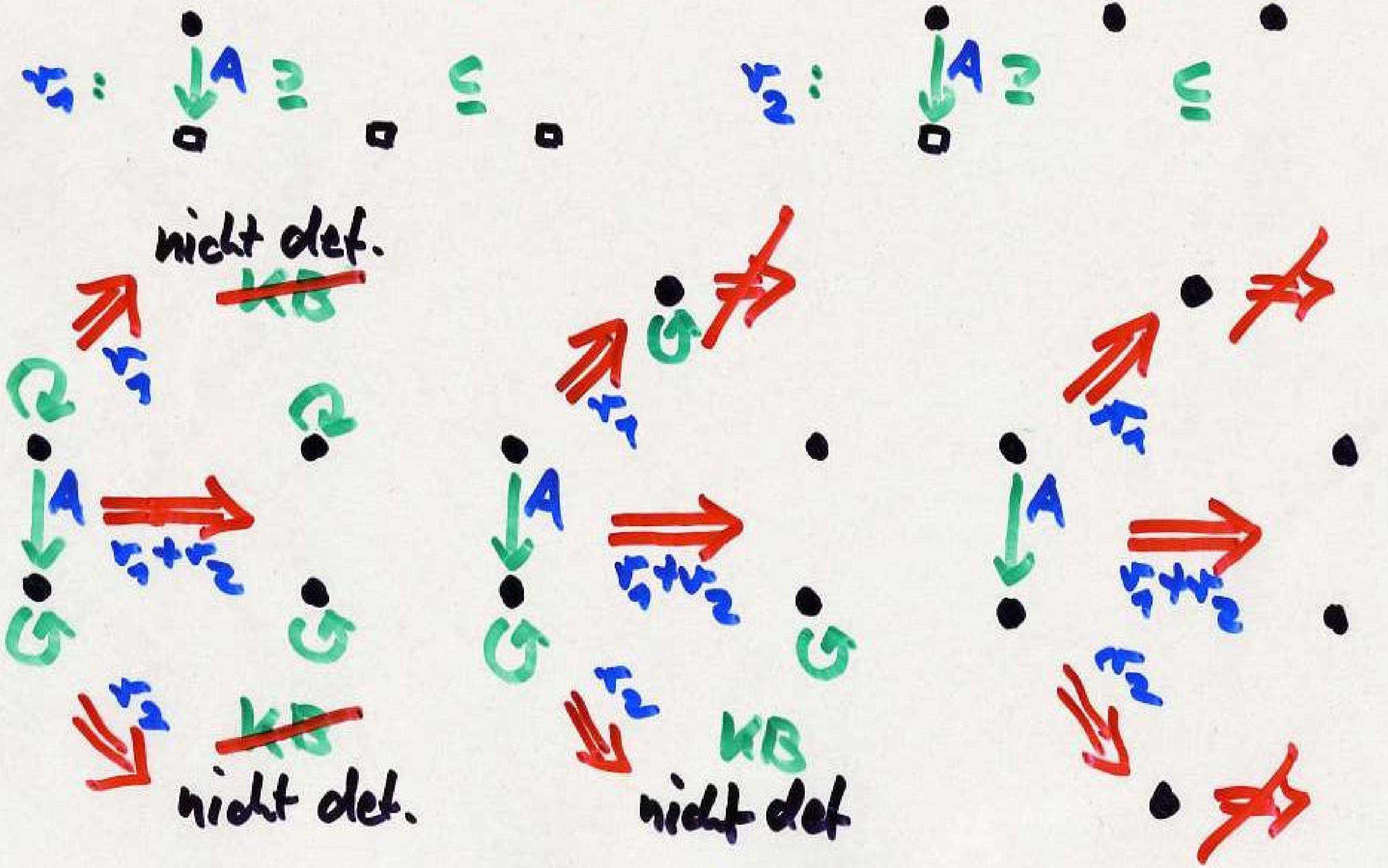
$$\langle g_1, g_2 \rangle (x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x \in L_1 \\ g_2(x) & \text{für } x \in L_2 \end{cases}$$

**Beobachtung:** (i) $g = \langle g|_{L_1}, g|_{L_2} \rangle$

(ii) $g_i = \langle g_1, g_2 \rangle |_{L_i}$

$\Bigg\}$ parallele Ansatz-suche möglich

# Kontaktbedingung: parallel vs. sequentiell



# Parallelableitungen mit Verklebungsbedingung

- Verklebungsbed. (VB) ist Kontaktbed. (KB) und Identifizierungsbed. (IB)
- $g: L \to M$ erfüllt IB bzgl. $r = (L \supseteq K \subseteq R)$, falls $g(x) = g(y)$ für $x \neq y$ $x, y \in K$ impliziert

**Beobachtung:** $g: L_1 + L_2 \to M$ erfüllt VB bzgl. $r_1 + r_2$ genau dann, wenn $g_i: L_i \to M$, $i = 1, 2$ VB erfüllen und zusätzlich gilt:

(*) $g_1(x) = g_2(y)$ impliziert $g_1(x) \in g_1(K_1)$, $g_2(y) \in g_2(K_2)$

- Bed. (*) wird parallele Unabhängigkeit genannt

# parallele Unabhängigkeit

gegeben:

$$M \underset{r_1}{\Longrightarrow} N_1 \qquad M \underset{r_2}{\Longrightarrow} N_2$$

$r_i = (L_i \supseteq K_i \subseteq R_i)$

$g_i : L_i \to M$ (VB)

$\triangleright$ $g_1(L_1) \cap g_2(L_2) \subseteq g_1(K_1) \cap g_2(K_2)$

Ansätze überlappen sich nur in Verklebungsteilen

gdw $g_1(L_1) \cap (g_2(L_2) - g_2(K_2)) = \emptyset$, $g_2(L_2) \cap (g_1(L_1) - g_1(K_1)) = \emptyset$

keine Regelanw. löscht Ansatzteile der anderen

Beob.: Dann gilt: $M \underset{r_1 + r_2}{\Longrightarrow} X$

mit Ansatz $g = \langle g_1, g_2 \rangle : L_1 + L_2 \to M$

## sequentielle Unabhängigkeit

gegeben: $M \xRightarrow[r_1]{} N_1 \xRightarrow[r_2]{} X$ mit Ansätzen

$$g_1 : L_1 \to M \;\&\; g_2' : L_2 \to N_1 \qquad \text{(VB)}$$

$\triangleright\ (R_1 - K_1) \cap g_2'(L_2) = \emptyset \;\&\; g_1(K_1) \cap (g_2'(L_2) - g_2'(K_2)) = \emptyset$

Ansatz des 2. Schrittes enthält nichts im 1. Schritt Erzeugtes und Verklebungsteile des 1. Schrittes werden im 2. Schritt nicht gelöscht

**Beob.:** Dann gilt $M \xRightarrow[r_1 + r_2]{} X$

- betrachte $M \overset{r_1}{\Longrightarrow} N_1 \overset{r_2}{\Longrightarrow} X$

d.h.

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[d, "g_1"'] & \supseteq & K_1 & \subseteq & R_1 & & L_2 \arrow[dl, "g_2'"'] & \supseteq & K_2 & \subseteq & R_2 \\
M & \supseteq & Z_1 & \subseteq & & N_1 & & \supseteq & Z_2 & \subseteq & X
\end{tikzcd}$$

$$Z_1 = M-(g_1(L_1)-g_1(K_1)) \qquad N_1 = Z_1+(R_1-K_1)$$

- 2. Schritt muss auf 1. warten, falls 1. Schritt etwas erzeugt, woran 2. ansetzt, d.h.

$$(R_1-K_1) \cap g_2'(L_2) \neq \emptyset \quad (\text{in } N_1)$$

- andernfalls $g_2'(L_2) \subseteq Z_1 \subseteq M$
- induziert Ansatz $g_2 : L_2 \to M$ mit $g_2(x) = g_2'(x)$
- $\langle g_1, g_2 \rangle : L_1 + L_2 \to M$ erfüllt VB, falls $g_1(K_1) \cap (g_2'(L_2) - g_2'(K_2)) = \emptyset$

# Parallelisierungssatz I

Dann gilt: $M \xRightarrow{r_1 + r_2} X$ (mit Ansatz $\langle g_1, g_2 \rangle$)

- die Voraussetzungen

  $(R_1 - K_1) \cap g_2'(L_2) = \emptyset$ & $g_1(K_1) \cap (g_2'(L_2) - g_2'(K_2)) = \emptyset$

  werden sequentielle Unabhängigkeit genannt

- gleichbedeutend: $h_1(R_1) \cap g_2'(L_2) \subseteq h_1(K_1) \cap g_2'(K_2)$

  mit $h_1(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x \in K_1 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

# Parallelisierungssatz II

Seien $M \begin{array}{l} \xRightarrow[r_1]{} N_1 \\ \xRightarrow[r_2]{} N_2 \end{array}$ parallel unabhängig

(d.h. $g_1(L_1) \cap g_2(L_2) \subseteq g_1(K_1) \cap g_2(K_2)$)

Dann ex. $M \xRightarrow[r_1 + r_2]{} X$ (mit Ansatz $\langle g_1, g_2 \rangle$)

# Sequentialisierungssatz

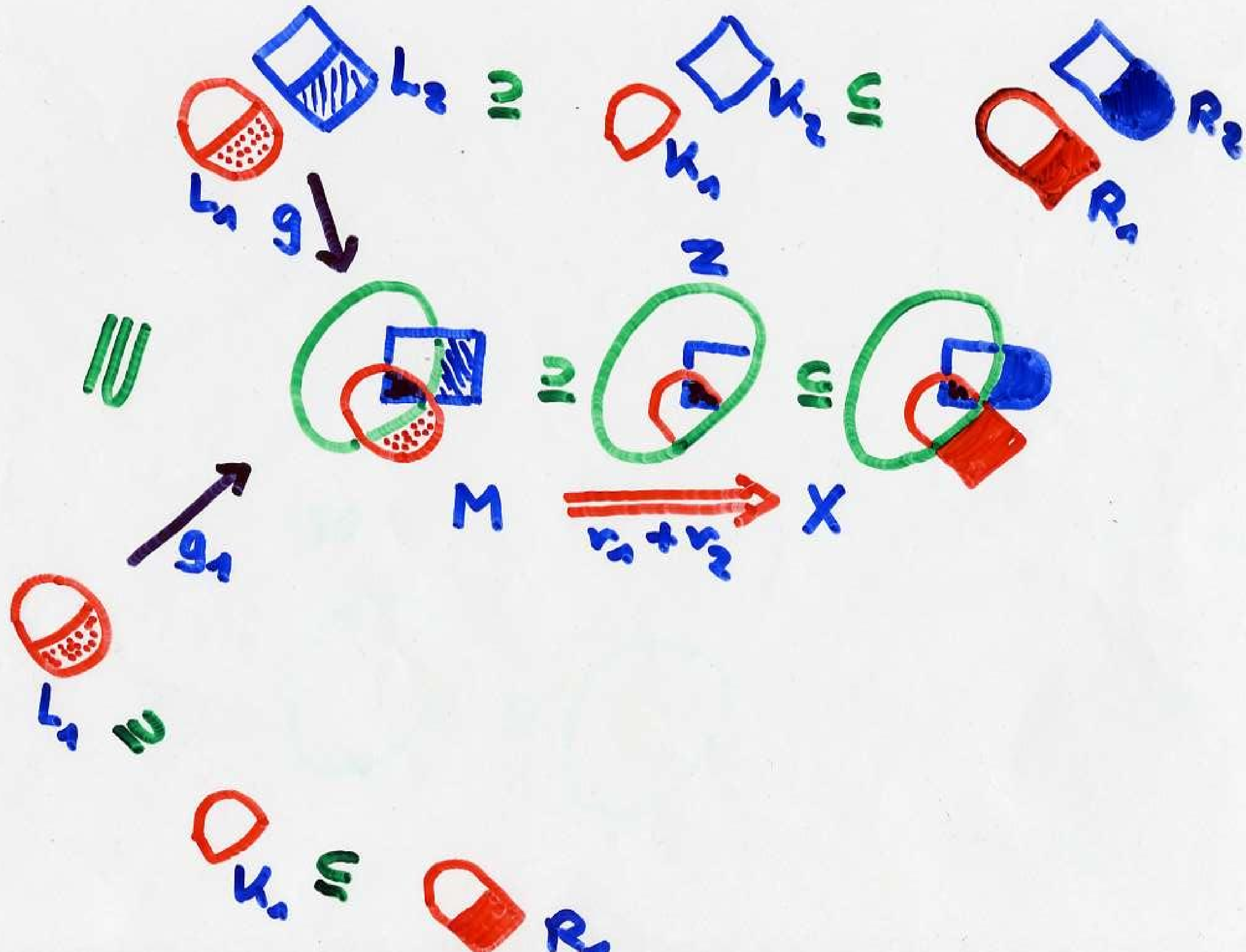
$M \xRightarrow[r_1 + r_2]{} X$ impl. $M \xRightarrow[r_1]{} N_1 \xRightarrow[r_2]{} X$

(auch $M \xRightarrow[r_2]{} N_2 \xRightarrow[r_1]{} X$ wg $r_1 + r_2 \equiv r_2 + r_1$)

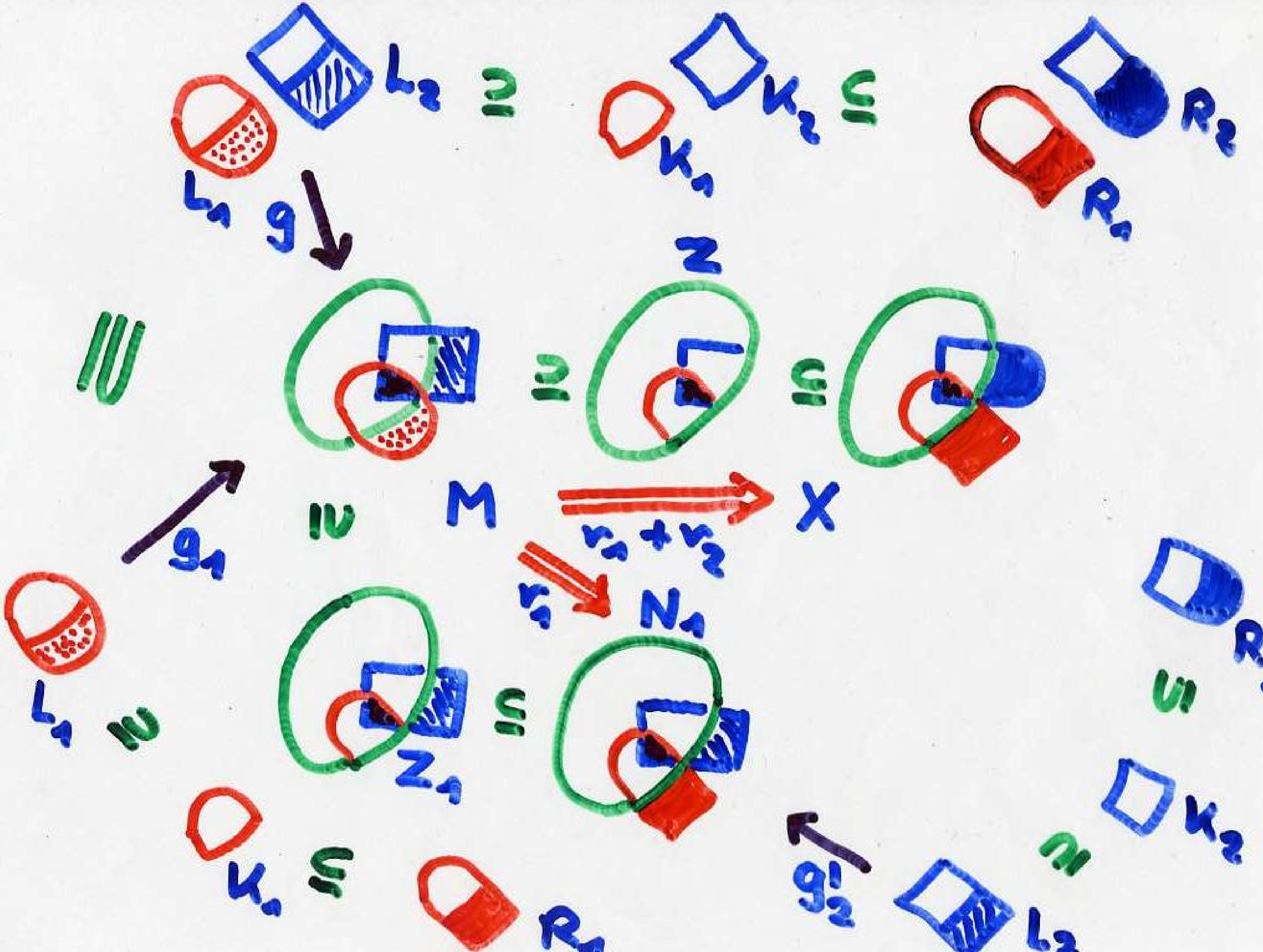
Außerdem:

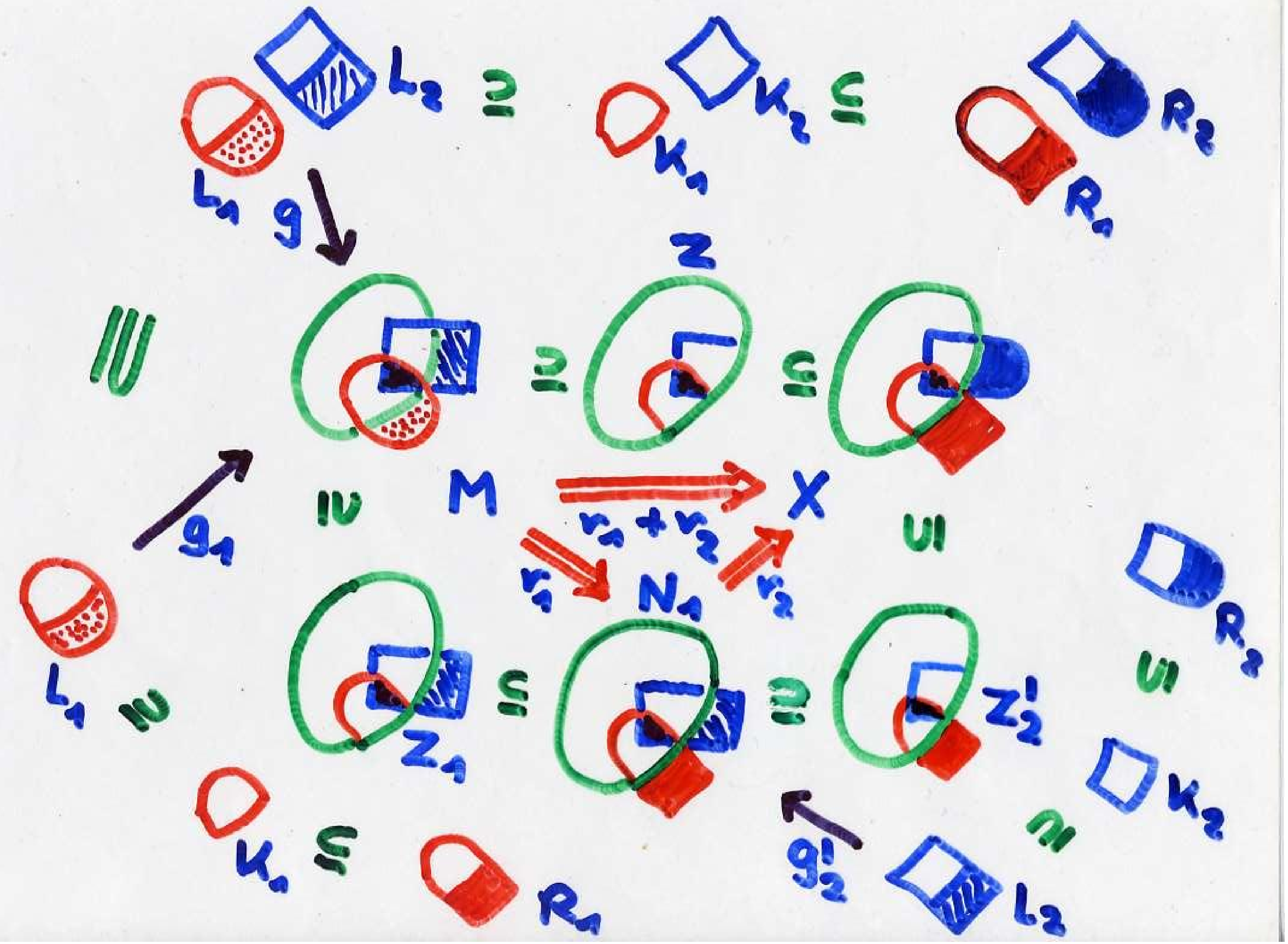
$M \xRightarrow[r_1]{} N_1 \xRightarrow[r_2]{} X$

$M \xRightarrow[r_2]{} N_2 \xRightarrow[r_1]{} X$ seq. unabh. & $M \begin{array}{l} \xRightarrow[r_1]{} N_1 \\ \xRightarrow[r_2]{} N_2 \end{array}$ par. unabh.



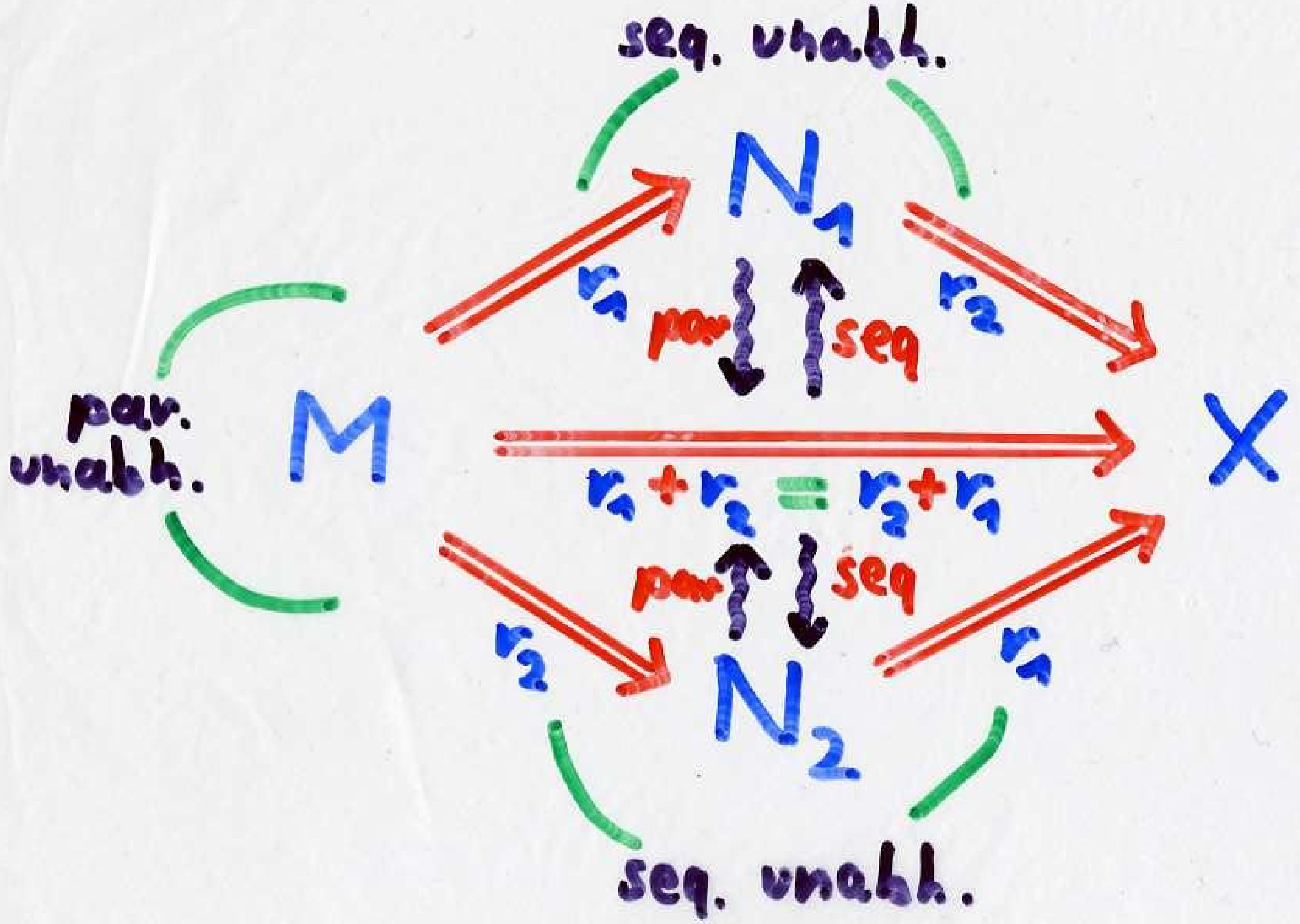
L2 ⊇ K2 ⊆ R2
L1
K1
R1
g
Z
M
X
r1 + r2
g1
L1
K1 ⊆ R1


$L_2$
$K_2$
$R_2$
$L_1$
$g$
$K_1$
$R_1$
$Z$
$M$
$X$
$r_1 + r_2$
$g_1$
$r_1$
$N_1$
$L_1$
$Z_1$
$K_1$
$R_1$
$R_2$
$K_2$
$g'_2$
$L_2$



$L_2$
$K_2$
$R_2$
$L_1$
$K_1$
$R_1$
$g$
$Z$
$M$
$X$
$r_1 + r_2$
$g_1$
$r_1$
$N_1$
$r_2$
$R_2$
$L_1$
$Z_1$
$Z_2'$
$K_2$
$K_1$
$R_1$
$g_2'$
$L_2$

# reine Nebenläufigkeit (pure concurrency)



# Prozesse in nebenläufigen Systemen

Ableitungen, die sich nur durch Sequentia-
lisierungen oder Parallelisierungen
voneinander unterscheiden, sind aus
nebenläufiger Sicht gleichwertig, d.h.
äquivalent (in Zeichen: ~ )