Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Caro von Totth
Studiengang Informatik
Universität Bremen

18. Mai 2006

# Formale Sprachen: Graphtransformation

## 2. Übungsblatt

### Eine graphtransformatorische Beschreibung endlicher Automaten

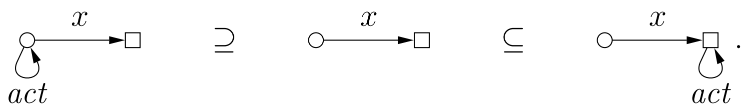
Sei $A = (Z, I, d, q_0, F)$ mit $d \subseteq Z \times I \times Z$, $q_0 \in Z$ und $F \subseteq Z$ ein endlicher Automat. $A$ lässt sich bekanntermaßen als Zustandsgraph auffassen, wenn man die Zustände als Knoten und die Zustandsübergänge als Kanten sieht. Zusätzlich werden der initiale Zustand, die Endzustände und ein aktueller Zustand durch Schleifen markiert. Formal ist der Zustandsgraph von $A$ mit dem aktuellen Zustand $q \in Z$ definiert durch

$$gr(A, q) = (Z, d \cup \{(q_0, \mathit{init}, q_0), (q, \mathit{act}, q)\} \cup \{(q'', \mathit{fin}, q'') \mid q'' \in F\}),$$

wobei die erste Projektion die Quelle ergibt, die dritte das Ziel und die zweite die Markierung, die deshalb nicht explizit angegeben sind.

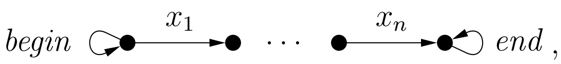
Für jede Eingabe $x \in I$ gibt es ausserdem eine Zustandsübergangsregel

*trans*($x$) :




Bei der Ansatzsuche ist ausdrücklich erlaubt, die beiden Knoten zu identifizieren, damit auch Schleifen im Zustandsgraphen durchlaufen werden können.

Wörter $w = x_1 \cdots x_n$ werden wie schon an anderer Stelle als Stringgraphen dargestellt:

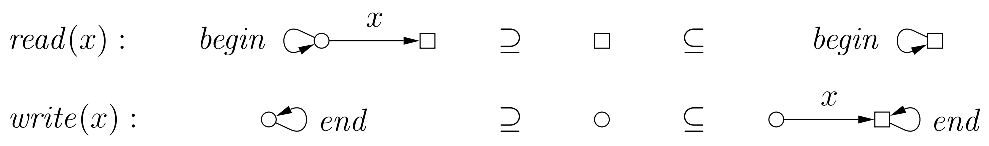



wobei hier Anfang und Ende durch entsprechende Schleifen markiert sind. Explizit lässt sich ein derartiger Graph definieren als

$$w^{\S} = (\{0, \ldots, n\}, \{(i-1, x_i, i) \mid i = 1, \ldots, n\} \cup \{(0, \mathit{begin}, 0), (n, \mathit{end}, n)\}.$$

Quelle, Ziel und Markierung sind wieder die drei Projektionen wie bei den Automaten.

Für jede Eingabe $x \in I$ gibt es ausserdem eine Lese- und eine Schreibregel:




Zeige nun, dass Folgendes gilt:

1. $gr(A, q) + (xv)^{\S} \xRightarrow[trans(x)+read(x)]{} gr(A, q') + v^{\S}$ g.d.w. $q' \in d(q, x)$
2. $gr(A, q) + (uv)^{\S} \overset{*}{\underset{P(I)}{\Longrightarrow}} gr(A, \overline{q}) + v^{\S}$ g.d.w. $\overline{q} \in d^*(q, u)$
3. $gr(A, q_0) + w^{\S} \overset{*}{\underset{P(I)}{\Longrightarrow}} gr(A, q'') + \lambda^{\S}$ mit $q'' \in F$ g.d.w. $w \in L(A)$

Dabei ist $P(I) = \{trans(x) + read(x) \mid x \in I\}$ und $+$ die disjunkte Vereinigung. Bei Graphen entsteht die disjunkte Vereinigung durch unverbundenes Nebeneinandersetzen der beiden Teilgraphen. Bei Regeln werden die linken Seiten, die Klebegraphen und die rechten Seiten getrennt disjunkt vereinigt.

4. Wie muss man die Ableitungen in den Charakterisierungen 1-3 ändern, damit sie gelten, wenn man in $P(I)$ *read* durch *write* ersetzt?
5. Wie kann man die Startgraphen und die Graphen, in denen Ableitungen enden, sowie die Regelmenge wählen, damit für zwei endliche Automaten $A_1$ und $A_2$ der Durchschnitt der erkannten Sprachen $L(A_1) \cap L(A_2)$ charakterisiert wird?
6. Alternativ kann statt Aufgaben 1-5 auch folgende Modellierungsaufgabe bearbeitet werden.

   Wähle Kellerautomaten, linear beschränkte Automaten oder Turing-Maschinen und modelliere diese analog zu endlichen Automaten mit Hilfe von Graphtransformation. Graphen und Regeln sind also so zu gestalten, dass die Arbeitsweise der gewählten Automaten durch Ableiten simuliert wird. Initiale und terminale Graphen sind ebenfalls geeignet zu beschreiben.

Abgabe bitte bis zum 01. Juni 2006.