Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski,
Caro von Totth
Studiengang Informatik

4. Juli 2006

Formale Sprachen: Graphtransformation

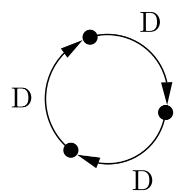
4. Übungsblatt

Gegenstand dieses Übungsblattes ist eine Hyperkantenersetzungsgrammatik, die die maximalen outer-planaren Graphen erzeugt. Solche Graphen werden kurz Möpse genannt und sind Gebilde, die so in die Ebene gelegt werden können, dass jeweils alle Knoten auf einem Außenkreis liegen und sich innerhalb des Kreises die größtmögliche Zahl an Kanten befindet, die sich nicht kreuzen. Betrachte dazu folgende Grammatik

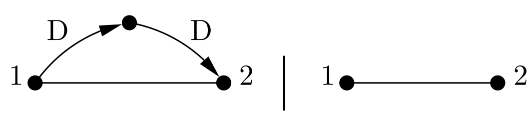
$$G_{MOPS} = (\{D, M\}, \{*\}, \{r_1, r_2, r_3\}, M)$$

mit den Regeln

$r_1 : M ::=$



$r_2 \mid r_3 : D ::=$



Wählt man D statt M als Startsymbol, erhält man die Grammatik $G_{MOPS,D}$. Die Elemente von $L(G_{MOPS,D})$ werden Drittelmöpse genannt.

Es sollen mit Hilfe des Kontexfreiheitslemmas einige Eigenschaften von Möpsen und Drittelmöpsen hergeleitet werden.

1. Für $H \in L(G_{MOPS,D})$ gilt:

   (A) $\#E_H = 2(\#V_H - 2) + 1$.

   (B) Es gibt einen einfachen Weg $v_1 \dots v_n$ von 1_H nach 2_H, auf dem alle Knoten liegen (d.h. insbesondere $n = \#V_H, 1_H = v_1, 2_H = v_n$).

(C) Für die so numerierten Knoten gilt $n = 2$ oder es existiert ein j mit $1 < j < n$, derart dass für jede Kante von v_i nach v_k mit $i < k$ gilt: ($i = 1$ und $k = n$) oder $k \leq j$ oder $j \leq i$.

(D) Wähle n Punkte auf einem geometrischen Kreis und benenne sie der Reihe nach mit $v_1, \ldots, v_n$, als Kanten zwischen v_i und v_{i+1} für $i = 1, \ldots, n-1$ wähle die Kreisbögen zwischen v_i und v_{i+1}, als Kanten zwischen v_i und v_k mit $k > i+1$ wähle die gerade Strecke zwischen v_i und v_k. Zeige, dass sich keine zwei Kanten kreuzen.

Punkt B bedeutet, dass H einen Hamiltonschen Weg besitzt. Punkt C sagt, dass die einzige Kante, die vor v_j beginnt und hinter v_j endet, die zwischen v_1 und v_n ist. Punkt D zeigt, dass sich H so in die Ebene legen lässt, dass alle Knoten auf einem geometrischen Kreis liegen und alle Kanten innerhalb eines der Kreissektoren, wenn man den Kreis längs der Linie von v_1 nach v_n schneidet.

2. Was ergibt sich aus Aufgabe 1 analog für Möpse?

3. Es gibt je einen Mops mit 3, 4 und 5 Knoten und 3 Möpse mit 6 Knoten. Welche Möpse gibt es mit 7 Knoten?

4. Welche der folgenden Eigenschaften gilt für $MOPS \in L(G_{MOPS})$?

   (A) Die Zahl der Dreiecke in $MOPS$ ist $\#V_{MOPS} - 2$.

   (B) $MOPS$ ist zusammehängend.

   (C) $MOPS$ ist 3-färbbar.

   (D) $MOPS$ ist Eulersch.

   (E) $MOPS$ ist Hamiltonsch.

   (F) $MOPS$ besitzt einen Knoten mit Grad 3, falls $\#V_{MOPS} \geq 4$.

   (G) $MOPS$ besitzt einen Knoten mit Grad 4, falls $\#V_{MOPS} \geq 5$.

   (H) $MOPS$ besitzt einen Knoten mit Grad 5, falls $\#V_{MOPS} \geq 8$.

5. Skizziere einen Algorithmus, der für Drittelmöpse und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ feststellt, ob sie einen Knoten des Grades k besitzen.

Abgabe bitte bis 20. Juli 2006.