

Formale Sprachen: Graphtransformation

1. Übungsblatt

Es werden unmarkierte Graphen mit Schleifen und Mehrfachkanten behandelt. Es gibt also insbesondere nur eine unsichtbare Markierung, die alle Kanten tragen und die deshalb keine Rolle spielt.

Als initiale Graphen stehen zur Verfügung:

$$A = \emptyset \quad | \quad B = \bullet \quad | \quad C = \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \quad | \quad D = \bullet \quad \bullet \quad | \quad E = \bullet \rightarrow \bullet$$

Außerdem werden folgende Regeln eingesetzt:

$$\begin{array}{ll} r_1 = (\emptyset \supseteq \emptyset \subseteq \bullet) & r_2 = (\bullet \supseteq \bullet \subseteq \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}) \\ r_3 = (\bullet \supseteq \bullet \subseteq \bullet \rightarrow \circ) & r_4 = (\bullet \quad \bullet \supseteq \bullet \quad \bullet \subseteq \bullet \rightarrow \bullet)^1 \\ r_5 = (\bullet \rightarrow \bullet \supseteq \bullet \quad \bullet \subseteq \bullet \rightarrow \square \rightarrow \bullet)^1 & r_6 = (\bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array} \supseteq \bullet \subseteq \bullet \begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}) \\ r_7 = (\bullet \rightarrow \circ \supseteq \bullet \quad \circ \subseteq \bullet \leftarrow \circ) & \end{array}$$

1. Soweit nicht bereits geschehen, ist in der folgenden Tabelle pro Zeile ein initialer Graph und sind geeignete Regeln so anzukreuzen, dass sich aus dem initialen Graphen mit den gewählten Regeln genau die Graphen ableiten lassen, die links beschrieben sind.

	A	B	C	D	E	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
alle Graphen												
alle Graphen ohne Schleifen												
alle Bäume ($\neq \emptyset$)		×						×				
alle Wälder (mit Bäumen $\neq \emptyset$)												
alle zusammenhängenden Graphen ($\neq \emptyset$)												
alle einfachen Wege (ohne leeren Weg)												
alle einfachen Kreise												

¹Diese beiden Regeln dürfen nur angewendet werden, wenn die beiden Knoten der linken Seite im Ansatz nicht identifiziert werden.

2. Trage selbst eine Zeile in die Tabelle ein, wobei die Menge der ableitbaren Graphen nicht endlich sein soll. Dabei soll insbesondere auch die erste Spalte sinnvoll ausgefüllt werden.
3. Gib alle Paare (X, r_i) mit $X \in \{A, B, C, D, E\}$ und $i \in \{1, \dots, 7\}$ an, so dass sich mit r_i aus X eine unendliche Sprache ableiten lässt.
4. Ein (nicht-leerer) *Baum* besteht aus einem Knoten (*Wurzel*), der Quelle von endlich vielen Kanten ist, deren Ziel jeweils die Wurzel eines Baumes ist. Diese Bäume sind untereinander paarweise disjunkt. Zeige, dass mit dem initialen Graphen B und der Regel 3 genau diese Bäume ableitbar sind.
5. Zeige, dass folgendes gilt: Wenn sich aus einem der initialen Graphen mit gewählten Regeln ein Graph mit drei Knoten ableiten lässt, dann lässt sich auch für jedes $k \geq 3$ ein Graph mit k Knoten ableiten.

Bemerkungen:

1. Wem Aufgabe 4 nicht gelingt, der kann ersatzweise analog die Korrektheit einer anderen Zeile der Tabelle zeigen. Dabei darf für Wälder die Korrektheit der Bäume vorausgesetzt werden. Die Punktezahlen werden jedoch bei den Zeilen 1, 2, 4, 6 und 7 um 10 reduziert, weil deren Korrektheit deutlich einfacher beweisbar ist als die der Zeilen 3 und 5.
2. Die Aufgabe 2 ist „individuell“ gemeint, d.h. Arbeitsgruppen sollen so viele Zeilen produzieren, wie sie Mitglieder haben.

Abgabetermin ist der 29. April 2010.