Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik
OAS 3001, Tel.: 2956, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
E-Mail: *kreo@informatik.uni-bremen.de*

23. Juni 2010

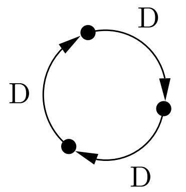
Formale Sprachen: Graphtransformation

4. Übungsblatt

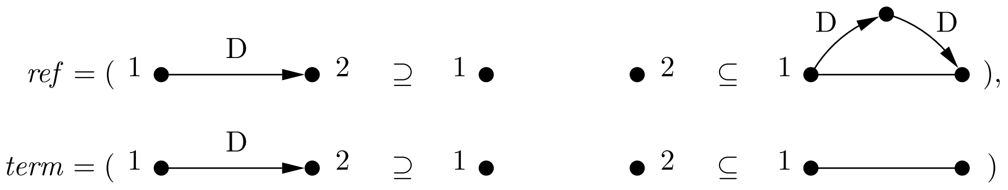
Gegenstand dieses Übungsblattes ist eine Graphgrammatik, die die maximalen outer-planaren Graphen erzeugt. Solche Graphen werden kurz Möpse genannt und sind Gebilde, die so in die Ebene gelegt werden können, dass jeweils alle Knoten auf einem Außenkreis liegen, die Kreissegmente zwischen den Knoten Kanten sind, die übrigen Kanten ihre beiden Endknoten gradlinig verbinden, und sich innerhalb des Kreises die größtmögliche Zahl an Kanten befindet, die sich nicht kreuzen. Betrachte dazu folgende Grammatik

$$G_{MOPS} = (M, \{ref, term\}, \{*\})$$

mit dem Startgraphen

$M =$ 

und den Regeln



Wählt man die linke Seite der beiden Regeln als Startgraph, erhält man die Grammatik $G_{MOPS,D}$. Die Elemente von $L(G_{MOPS,D})$ werden Drittelmöpse genannt.

Da keine Knoten gelöscht werden, bleiben die Knoten 1 und 2 beim Ableiten erhalten. Für $H \in L(G_{MOPS,D})$ werden diese Knoten 1_H und 2_H genannt. Mit Hilfe der Ableitungsstruktur lässt sich H dann folgendermaßen charakterisieren: Entweder besteht H aus den zwei Knoten 1_H und 2_H und einer ungerichteten Verbindung zwischen ihnen oder es gibt zwei Drittelmöpse $H_1, H_2 \in L(G_{MOPS,D})$, so dass aus H_1 und H_2 gerade H entsteht, wenn man 2_{H_1} und 1_{H_2} verschmilzt und 1_{H_1} und 2_{H_2} ungerichtet verbindet mit $1_{H_1} = 1_H$ und $2_{H_2} = 2_H$. Da die Drittelmöpse H_1 und H_2 kleiner als der Drittelmops H sind, erlaubt diese Charakterisierung Induktionsbeweise über die Größe von Drittelmöpsen. Das soll in der folgenden Aufgabe verwendet werden.

1. Für $H \in L(G_{MOPS,D})$ gilt:

   (A) $\#E_H = 2(\#V_H - 2) + 1$.

   (B) Es gibt einen einfachen Weg $v_1 \dots v_n$ von 1_H nach 2_H, auf dem alle Knoten liegen (d.h. insbesondere $n = \#V_H, 1_H = v_1, 2_H = v_n$).

   (C) Für die so numerierten Knoten gilt $n = 2$ oder es existiert ein j mit $1 < j < n$, derart dass für jede Kante von v_i nach v_k mit $i < k$ gilt: ($i = 1$ und $k = n$) oder $k \leq j$ oder $j \leq i$.

   (D) Wähle n Punkte auf einem geometrischen Kreis und benenne sie der Reihe nach mit $v_1, \dots, v_n$, als Kanten zwischen v_i und v_{i+1} für $i = 1, \dots, n-1$ wähle die Kreisbögen zwischen v_i und v_{i+1}, als Kanten zwischen v_i und v_k mit $k > i + 1$ wähle die gerade Strecke zwischen v_i und v_k. Zeige, dass sich keine zwei Kanten kreuzen.

   Punkt B bedeutet, dass H einen Hamiltonschen Weg besitzt. Punkt C sagt, dass die einzige Kante, die vor v_j beginnt und hinter v_j endet, die zwischen v_1 und v_n ist. Punkt D zeigt, dass sich H so in die Ebene legen lässt, dass alle Knoten auf einem geometrischen Kreis liegen und alle Kanten innerhalb eines der Kreissektoren, wenn man den Kreis längs der Linie von v_1 nach v_n schneidet.

2. Was ergibt sich aus Aufgabe 1 analog für Möpse?

3. Es gibt je einen Mops mit 3, 4 und 5 Knoten und 3 Möpse mit 6 Knoten. Welche Möpse gibt es mit 7 Knoten?

4. Welche der folgenden Eigenschaften gilt für $MOPS \in L(G_{MOPS})$?

   (A) Die Zahl der Dreiecke in $MOPS$ ist $\#V_{MOPS} - 2$.

   (B) $MOPS$ ist zusammehängend.

   (C) $MOPS$ ist 3-färbbar.

   (D) $MOPS$ ist Eulersch.

   (E) $MOPS$ ist Hamiltonsch.

   (F) $MOPS$ besitzt einen Knoten mit Grad 3, falls $\#V_{MOPS} \geq 4$.

   (G) $MOPS$ besitzt einen Knoten mit Grad 4, falls $\#V_{MOPS} \geq 5$.

   (H) $MOPS$ besitzt einen Knoten mit Grad 5, falls $\#V_{MOPS} \geq 8$.

Abgabe bitte bis 8. Juli 2010.