Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski, Renate Klempien-Hinrichs
Studiengang Informatik
MZH 3260, Tel.: 2956, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
E-Mail: {kreo, rena}@informatik.uni-bremen.de

29. Oktober 2001
Aufgaben 1

Algebraische Spezifikation

1. Übungsblatt

Geübt werden Signaturen, Terme und ihre Interpretation (vgl. Definitionen 2.1, 2.10 und 2.13 im Skript).

Betrachte folgende Signatur der Potenzmenge über dem Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \geq 1)$:

$$\begin{array}{lll}
\textbf{spec} & \multicolumn{2}{l}{\textsc{Set} =} \\
 & \textbf{sorts} & \mathit{Alphabet}, \mathit{Set} \\
 & \textbf{opns} & a_1 \colon \to \mathit{Alphabet} \\
 & & \vdots \\
 & & a_n \colon \to \mathit{Alphabet} \\
 & & \emptyset \colon \to \mathit{Set} \\
 & & \mathit{insert} \colon \mathit{Alphabet} \times \mathit{Set} \to \mathit{Set} \\
 & & \mathit{union} \colon \mathit{Set} \times \mathit{Set} \to \mathit{Set}
\end{array}$$

Eine Algebra dieses Typs wird von der Menge aller Teilmengen von A einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der üblichen Vereinigung von Mengen induziert:

$$2^A = (A, 2^A, a_1, \ldots, a_n, \emptyset, \mathsf{ins}, \cup)$$

mit $\mathsf{ins}(a, X) = \{a\} \cup X$ für alle $a \in A$ und $X \subseteq A$.

1. Erweitere Set um mindestens drei weitere Operationen.
2. Welche der folgenden Terme sind warum syntaktisch falsch?

   (a) $\mathit{insert}(x, \emptyset)$
   (b) $\mathit{insert}(a, \emptyset)$
   (c) $\mathit{insert}(a_1, \emptyset)$
   (d) $\mathit{insert}(\emptyset, a_1)$
   (e) $\mathit{Insert}(a_1, \emptyset)$
   (f) $\mathit{INSERT}(a_1, \emptyset)$
   (g) $\mathit{insert}(\emptyset, \emptyset)$
   (h) $\mathit{insert}(a_1)$
   (i) empty
   (j) $\emptyset\ \mathit{union}\ \emptyset$
   (k) $\mathit{union}(\emptyset, \emptyset)$
   (l) $\mathit{union}(\mathit{insert}(a_1, \emptyset), \emptyset)$
   (m) $\mathit{onion}(\emptyset, \emptyset)$
   (n) $\mathit{union}(\mathit{insert}(a_1, \emptyset), \emptyset, \emptyset)$
   (o) $\emptyset = \emptyset$

3. Interpretiere den Term

   $$\mathit{insert}(a_1, \mathit{union}(\mathit{insert}(a_2, \emptyset), \mathit{insert}(a_3, \emptyset)))$$

   in 2^A. Dabei wird vorausgesetzt, dass A mindestens die drei Elemente a_1, a_2, a_3 enthält.

4. Zeige, dass die Terme

   $$\mathit{insert}(a_i, \mathit{insert}(a_i, t)) \quad \text{und} \quad \mathit{insert}(a_i, t)$$

   für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jeden Term t der Sorte *Set* in 2^A gleich interpretiert werden.

5. Gib selbst zwei verschiedene Terme an, die auch einen beliebigen Term der Sorte *Set* enthalten und in 2^A gleich interpretiert werden.

6. Betrachte die Set-Algebra

   $$A^* = (A, A^*, a_1, \ldots, a_n, \lambda, \mathsf{insert}, \mathsf{concat}),$$

   wobei concat die übliche Konkatenation ist (d.h. $\mathsf{concat}(u, v) = uv$) und der Rest wie in Beispiel 2.9.3 im Skript gewählt ist.

   Zeige, dass die beiden Terme in Aufgabe 4 in A^* verschieden interpretiert werden.

   Wie steht es mit den für Aufgabe 5 gewählten Termen?

7. Zum Schluss noch eine schwierigere Aufgabe, für deren Bearbeitung Kenntnisse über kontextfreie Grammatiken benötigt werden (siehe z.B. die Abschnitte 5 und 13 im Skript *Theoretische Informatik 2*).

   (a) Gib eine kontextfreie Grammatik G an, die die Menge $T_{\textsc{Set},\mathit{Set}}$ der Terme zur Sorte *Set* erzeugt.

   (b) Zeige, dass G korrekt ist, d.h. dass $L(G) = T_{\textsc{Set},\mathit{Set}}$ gilt.
   Dabei darf verwendet werden, dass $T_{\textsc{Set},\mathit{Alphabet}} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist.

Abgabe bis zum 13. November 2001.