

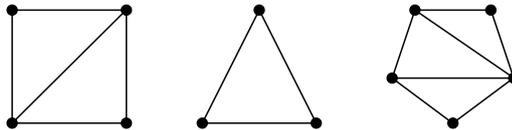
Algorithmen auf Graphen

1. Übungsblatt

Gruppe	
--------	--

1. Ungerichtete Graphen

(a) Füge in den aus drei Komponenten bestehenden Graphen



drei Kanten ein, so dass der Ergebnisgraph Eulersch ist.

(b) Von den folgenden Aussagen für alle ungerichteten Graphen ist nur eine richtig. Welche sind falsch, welche ist richtig? Gib für jede falsche Aussage ein Gegenbeispiel an. Beweise die richtige Aussage mit vollständiger Induktion über die Zahl der Kanten.

i. Die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ist gerade. richtig falsch

ii. Die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ist ungerade. richtig falsch

iii. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade. richtig falsch

iv. Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist ungerade. richtig falsch

2. Ungerichtete Graphen mit Schleifen

Die bisherigen ungerichteten Graphen werden zu ungerichteten Graphen mit Schleifen, wenn man erlaubt, dass die Aufhängung jeder Kante nicht nur eine 2-elementige Teilmenge der Knotenmenge zuordnen kann, sondern auch eine 1-elementige:

$$att: E \rightarrow \binom{V}{1} \cup \binom{V}{2}$$

Eine Schleife, also eine Kante mit nur einem inzidenten Knoten, wird wie folgt gezeichnet:



Die Definition von Wegen, Kreisen, Eulerschen Kreisen, Zusammenhang und isolierten Knoten wird für ungerichtete Graphen mit Schleifen unverändert übernommen. Dabei wird eine einzelne Schleife auch als Kreis betrachtet.

- (a) Definiere für ungerichtete Graphen $G = (V, E, att)$ mit Schleifen den *Grad* eines Knoten $v \in V$ so, dass der Hauptsatz über Eulersche Graphen ¹ auch für diese Graphen gilt.

$$\text{degree}(v) :=$$

- (b) Gib einen Beispielgraphen an, der zeigt, dass der Hauptsatz über Eulersche Graphen nicht mehr gilt, wenn man die Definition des Grades unverändert beibehält (mit kurzer Erläuterung bitte).

- (c) Gib einen Beispielgraphen an, der zeigt, dass man die Schleifen bei der Definition des Grades nicht ignorieren kann, wenn der Hauptsatz über Eulersche Graphen weiterhin gelten soll (mit kurzer Erläuterung bitte).

- (d) Transformiere jeden ungerichteten Graphen G mit Schleifen in einen ohne Schleifen $oS(G)$, so dass G genau dann Eulersch ist, wenn es $oS(G)$ ist.

- (e) Beweise, dass die Behauptung in (d) gilt.

Abgabe bis 17. November 2010.

¹ G ist genau dann Eulersch, wenn G gradgradig und bis auf isolierte Knoten zusammenhängend ist.