Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik
Universität Bremen

17. Januar 2011

Algorithmen auf Graphen

4. Übungsblatt

Gruppe	

Ein Entscheidungsproblem ist eine Abbildung $D\colon IN \to \{\text{JA}, \text{NEIN}\}$, die jeder Eingabe aus IN eine Antwort JA oder NEIN zuordnet. Die Entscheidungsprobleme HAM, HAMPATH und $\text{HAMPATH}_{\text{special}}$ haben als Eingabemenge die einfachen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $E \subseteq \binom{V}{2}$, $\text{HAMPATH}_{\text{special}}$ dazu noch zwei verschiedene Knoten A und B aus dem Eingabegraphen.

- $\text{HAM}(G) = \text{JA}$ gdw. es in G einen *Hamiltonschen Kreis* gibt, d.h. einen einfachen Kreis durch alle Knoten; die Knoten (bis auf Anfang = Ende) kommen also genau einmal vor.
- $\text{HAMPATH}(G) = \text{JA}$ gdw. es in G einen *Hamiltonschen Weg* gibt, d.h. einen einfachen Weg durch alle Knoten.
- $\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA}$ gdw. es in G einen Hamiltonschen Weg von A nach B gibt; es wird also zusätzlich der Anfangs- und der Endknoten festgelegt.

Das *Traveling-Salesman-Problem* (TSP) erhält als Eingabe einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, eine Entfernungsfunktion $dist\colon E \to \mathbb{N}$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Die zu entscheidende Frage ist, ob es einen Hamiltonschen Kreis in G gibt, dessen Entfernung die gegebene Zahl n nicht übersteigt, d.h. $\text{TSP}(G, dist, n) = \text{JA}$ gdw. in G existiert ein Hamiltonscher Kreis K mit $dist(K) \leq n$.
Beim *vollständigen Traveling-Salesman-Problem* ($\text{TSP}_{\text{complete}}$) ist der eingegebene Graph vollständig (also sind je zwei verschiedene Knoten durch eine Kante verbunden); sonst ist alles wie bei TSP.

1. Wahr oder falsch?

   Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige ungerichtete Graphen G und ggfs. Knoten A, B in G richtig, welche falsch? Gib für jede falsche Aussage ein Gegenbeispiel an.

   (a) Wenn $\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA}$, dann auch $\text{HAMPATH}(G) = \text{JA}$.
   ☐ richtig ☐ falsch

   (b) Wenn $\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA}$, dann auch $\text{HAM}(G) = \text{JA}$.
   ☐ richtig ☐ falsch

   (c) Wenn $\text{HAMPATH}(G) = \text{JA}$, dann auch $\text{HAM}(G) = \text{JA}$.
   ☐ richtig ☐ falsch

   (d) Wenn $\text{HAMPATH}(G) = \text{JA}$, dann auch $\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA}$.
   ☐ richtig ☐ falsch

   (e) Wenn $\text{HAM}(G) = \text{JA}$, dann auch $\text{HAMPATH}(G) = \text{JA}$.
   ☐ richtig ☐ falsch

   (f) Wenn $\text{HAM}(G) = \text{JA}$, dann auch $\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA}$.
   ☐ richtig ☐ falsch

2. Von $\text{HAMPATH}_{\text{special}}$ nach HAMPATH

   (a) Sei G ein ungerichteter Graph und seien A und B zwei ausgezeichnete Knoten ($A \neq B$). Zeige, dass folgende Aussage im Allgemeinen falsch ist:

   $$\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA gdw. HAMPATH}(G) = \text{JA.}$$

   (b) Gib eine polynomielle Konstruktion an, die zu jedem ungerichteten Graphen G und zwei verschiedenen Knoten A und B von G einen ungerichteten Graphen G' festlegt, so dass gilt:

   $$\text{HAMPATH}(G') = \text{JA gdw. HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA.}$$

   Zeige dazu auch die Korrektheit deiner Konstruktion für (b).

3. Von $\text{HAMPATH}_{\text{special}}$ nach HAM

   (a) Sei G ein ungerichteter Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten $A \neq B$. Sei G_{AB} der Graph, der entsteht, wenn man $\{A, B\}$ als Kante zu G hinzunimmt. Zeige, dass die folgende Aussage im Allgemeinen falsch ist:

   $$\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA gdw. HAM}(G_{AB}) = \text{JA.}$$

   (b) Gib eine polynomielle Konstruktion an, die zu jedem ungerichteten Graphen G mit zwei ausgezeichneten Knoten $A \neq B$ einen ungerichteten Graphen G'_{AB} festlegt, so dass gilt:

   $$\text{HAMPATH}_{\text{special}}(G, A, B) = \text{JA gdw. HAM}(G'_{AB}) = \text{JA.}$$

   Zeige dazu auch die Korrektheit deiner Konstruktion für (b).

4. Von $\text{TSP}_{\text{complete}}$ nach TSP und zurück

   (a) Zeige, dass sich $\text{TSP}_{\text{complete}}$ auf TSP reduzieren lässt, d.h. $\text{TSP}_{\text{complete}} \leq \text{TSP}$.

   (b) Zeige, dass sich TSP auf $\text{TSP}_{\text{complete}}$ reduzieren lässt, d.h. $\text{TSP} \leq \text{TSP}_{\text{complete}}$.

Abgabe bis 2. Februar 2011.