Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik

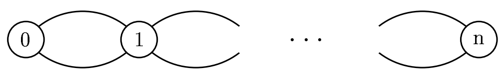
26.10.2002

Algorithmen auf Graphen (WS 2002/2003)

1. Übungsblatt: Viele Wege und Kreise

In diesem Übungsblatt geht es um die Zahl einfacher Wege und Kreise in speziellen Graphen. Insbesondere stellt sich heraus, dass es in Relation zur Knotenzahl exponentiell viele sein können.

1. Betrachte die Graphen $B(n)$ für $n \geq 1$

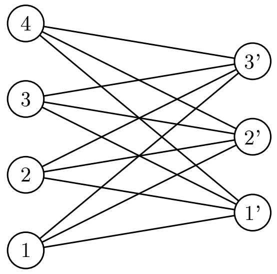
   

   mit den $n+1$ Knoten $0, \ldots, n$ und für $i = 1, \ldots, n$ je zwei Kanten zwischen den Knoten $i-1$ und i. Bezeichne $b(n)$ die Zahl der einfachen Wege von 0 nach n in $B(n)$.

   Es soll gezeigt werden, dass $b(n) = 2^n$ gilt.

2. Betrachte die vollständigen bipartiten Graphen $K(m,n)$ mit den $m+n$ Knoten $1, \ldots, m$ und $1', \ldots, n'$ und je einer Kante zwischen i und j' für $i = 1, \ldots, m$ und $j' = 1', \ldots, n'$.

   Der K(4,3) beispielsweise hat folgendes Aussehen:

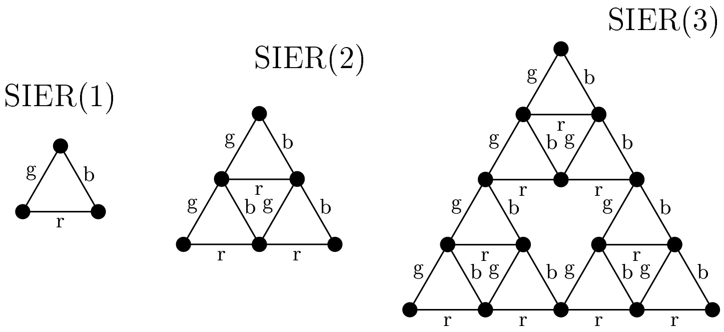
   Bezeichne $k(m,n,p)$ die Zahl der einfachen Wege der Länge $2p-1$, die in einem der Knoten $1, \ldots, m$ beginnen. Sei ferner $m \geq n \geq 1$.
   Es soll folgendes gezeigt werden:

   (a) $k(m,n,1) = m \cdot n$

   (b) $k(m,n,p+1) = k(m,n,p) \cdot (m-p) \cdot (n-p)$ für $1 \leq p < n$

   (c) $k(m,n,p) = \binom{m}{p} \cdot \binom{n}{p} \cdot \Big(p!\Big)^2$ für $1 \leq p \leq n$

3. Betrachte die Sierpinski-Dreiecke $SIER(n)$



wobei $SIER(n+1)$ aus drei Kopien von $SIER(n)$ entsteht, indem die entsprechenden Ecken miteinander verklebt werden. Bezeichne $e(n)$ die Zahl der Kanten von $SIER(n), v(n)$ die Zahl der Knoten $brg(n)$ die Zahl der einfachen Kreise, bei denen b-Kanten vor r-Kanten vor g-Kanten auftreten, und $br(n)$ schließlich die Zahl der einfachen Wege, die nur b- und r-Kanten enthalten und die Ecke oben mit der unten links verbinden.

(a) Zeige $e(n) = 3^n$,

(b) Stelle rekursive Formeln für $v(n), brg(n)$ und $br(n)$ auf und begründe sie.