Frank Drewes & Hans-Jörg Kreowski
Studiengang Informatik

26. Oktober 1999
Übungsblatt 1

Syntaktische Methoden der Bilderzeugung (WS 1999/2000)

1. Übungsblatt

(Abgabe: 9. November 1999)

Die folgenden Übungsaufgaben gehören zum Themenbereich Kettencode-Bildsprachen.

Aufgabe 1 Betrachte folgende Menge von Bildbeschreibungen:

$$L_{riddle} = \{nuos\,twin(u)\,w \mid u \in \{o,n\}^*, \#_o(u) = \#_n(u)\}.$$

Dabei ist $\#_x \colon \{o,s,w,n\}^* \to \mathbb{N}$ für $x \in \{o,s,w,n\}$ definiert durch

$$\begin{array}{lcl} \#_x(\lambda) & = & 0 \\ \#_x(xu) & = & \#_x(u)+1 \\ \#_x(yu) & = & \#_x(u) \text{ falls } x \neq y. \end{array}$$

Und $twin \colon \{o,s,w,n\}^* \to \{o,s,w,n\}^*$ ist gegeben durch

$$\begin{array}{lcl} twin(\lambda) & = & \lambda \\ twin(ou) & = & twin(u)\,s \\ twin(su) & = & twin(u)\,o \\ twin(wu) & = & twin(u)\,n \\ twin(nu) & = & twin(u)\,w. \end{array}$$

(i) Zeichne für eine Bildbeschreibung r_0 aus L_{riddle} mit $length(r_0) = 24$ das zugehörige Bild $drawing(r_0)$. Benutze dabei bitte für die erste Hälfte eine andere Farbe als für die zweite.

(ii) Charakterisiere die durch L_{riddle} gegebene Bildsprache $picture(L_{riddle})$. Es soll also genau beschrieben werden, wie die Bilder dieser Sprache aussehen.

(iii) Betrachte die kontextfreie Grammatik G_{riddle} mit den Regeln $S ::= nAw$ und $A ::= nAw \mid oAs \mid os$, wobei S das Startsymbol ist, A ein weiteres Nichtterminal und $\{o,s,w,n\}$ das terminale Alphabet. In welcher Beziehung stehen $L(G_{riddle})$ und L_{riddle}? Sind sie gleich? Oder ist eine in der anderen enthalten, aber nicht umgekehrt? Oder ist keine von beiden in der jeweils anderen enthalten? Die Antwort soll möglichst bewiesen werden.

Aufgabe 2 Betrachte die Bildsprache $L_{uglytrees}$, bei der jedes Element aus einer senkrecht auf dem Nullpunkt stehenden Achse ganzzahliger Länge besteht, von deren Zwischenpunkten (mit ganzzahligen Koordinaten) je ein Strang ganzzahliger Länge nach links oder rechts abzweigt. Gib eine kontextfreie Grammatik $G_{uglytrees}$ an mit $picture(L(G_{uglytrees})) = L_{uglytrees}$.

Aufgabe 3 Was verrät eigentlich eine Bildbeschreibung über ihr zugehöriges Bild (selbst wenn man es aus irgendeinem Grunde nicht zeichnen kann oder will)? Diese Frage wird am Beispiel der Ausdehnung nach Norden behandelt. Betrachte dazu die Abbildung $y_{max} \colon \{o,s,w,n\}^* \to \mathbb{N}$ mit $y_{max}(u) = \max\{y \mid u = vv' \text{ und } e(v) = (x,y)\}$ für alle $u \in \{o,s,w,n\}^*$. Offensichtlich ist $y_{max}(u)$ die y-Koordinate der nördlichsten Punkte in $p(u)$ falls $u \neq \lambda$ und 0 sonst. (Wer mag, kann sich kurz überlegen, wie man das beweisen kann.)

Betrachte jetzt das Regelsystem $sn ::= \lambda$, $o ::= \lambda$, $w ::= \lambda$. Eine Bildbeschreibung $u \in \{o,s,w,n\}^*$ heißt *reduziert*, falls keine dieser Regeln auf sie anwendbar ist. Es soll gezeigt werden, daß aus jeder Bildbeschreibung $u \in \{o,s,w,n\}^*$ eine der Form $n^i s^j$ für geeignete $i,j \in \mathbb{N}$ abgeleitet werden kann, und daß dann $y_{max}(u) = i$ gilt.

Es wird vorgeschlagen, dazu folgende Beobachtungen zu beweisen:

(i) $u \in \{o,s,w,n\}^*$ ist genau dann reduziert, wenn es $i,j \in \mathbb{N}$ mit $u = n^i s^j$ gibt.

(ii) Die Länge einer Ableitung $u \xrightarrow{*} u'$ ist stets kleiner oder gleich der Länge von u. Jede Ableitung führt also zu einer reduzierten Bildbeschreibung.

(iii) Für alle $u = vv' \in \{o,s,w,n\}^*$ mit $e(v) = (x,y)$ gilt

$$y_{max}(u) = \max(y_{max}(v), y_{max}(v') + y).$$

(iv) $u \longrightarrow u'$ impliziert $y_{max}(u) = y_{max}(u')$.

(v) $y_{max}(n^i s^j) = i$.

Wieso folgt daraus das zu Zeigende?