Das Halteproblem

- Eingabe: Ein $while$-Programm P und eine Eingabe a für P
- Ausgabe: 1, falls P mit der Eingabe a hält
  0, sonst.

Unlösbarkeit des speziellen Halteproblems

- Das Problem, ob ein Programm hält, wenn es auf den eigenen Index angewendet wird, ist nicht lösbar, d.h.:

Die Funktion $HALTEPROBLEM : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die definiert ist für alle $i \in \mathbb{N}$ durch

$$HALTEPROBLEM(i) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } SEM_i(i) \text{ definiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht berechenbar.

Beweisskizze

- Annahme: $HALTEPROBLEM$ ist berechenbar durch das $while$-Programm HALT1.
- Betrachte das Programm KONFUS:

```
begin   HALT1;
   while X1 ≠ 0 do X1 := X1;
end
```

- Sei j der Index von KONFUS. Dann gilt
  - KONFUS(j) hält $\Longrightarrow$ HALT1$(j) = 0 \Longrightarrow$ KONFUS(j) hält nicht.
  - KONFUS(j) hält nicht $\Longrightarrow$ HALT1$(j) = 1 \Longrightarrow$ KONFUS(j) hält.

Unlösbarkeit des allgemeinen Halteproblems

- Das Problem, ob ein Programm auf eine beliebige Eingabe hält, ist nicht lösbar, d.h.:

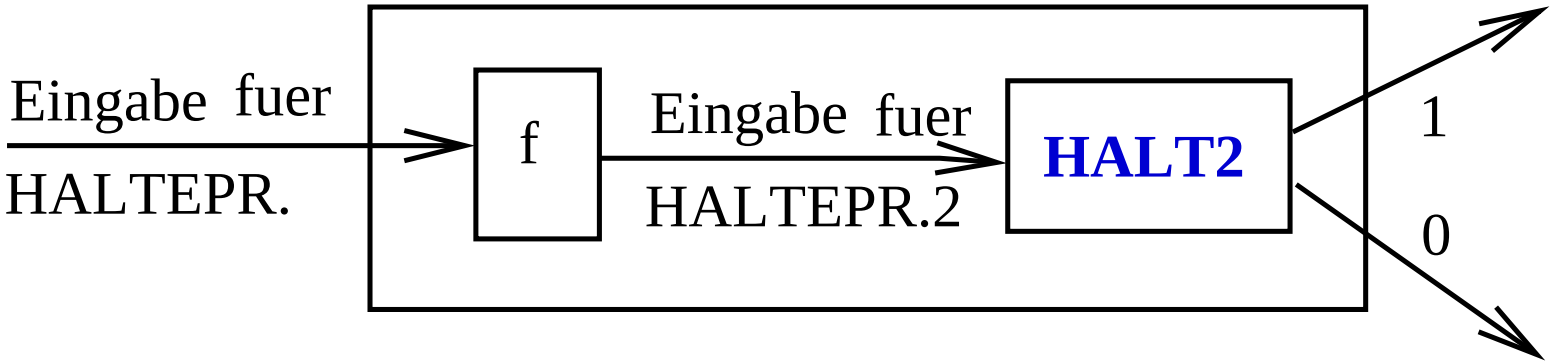
Die Funktion $HALTEPROBLEM2: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$HALTEPROBLEM2(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } SEM_i(j) \\ & \text{definiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

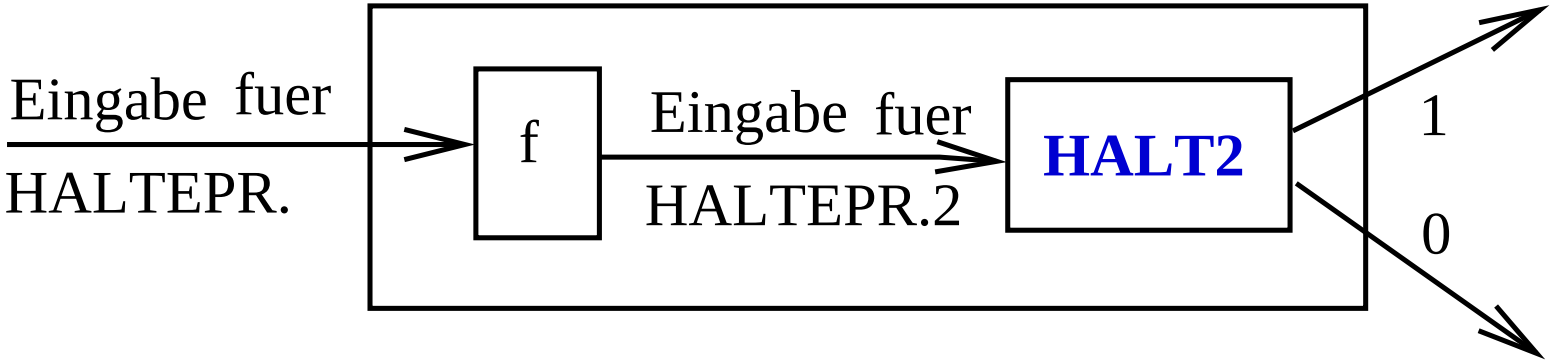
ist nicht berechenbar.

Beweisskizze

- Annahme: $HALTEPROBLEM2$ wird durch HALT2 berechnet.
- Reduktion von $HALTEPROBLEM$ auf $HALTEPROBLEM2$:



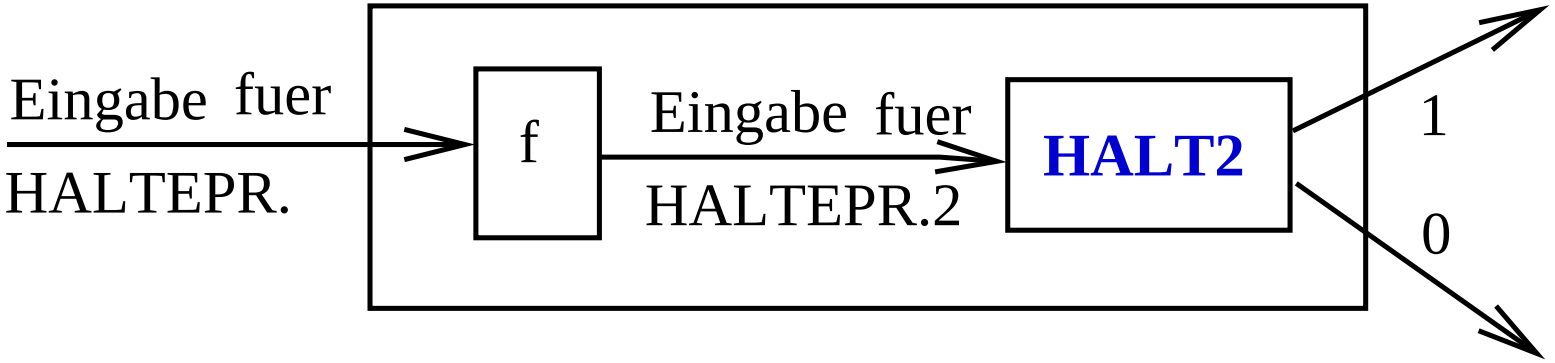
Gesucht ist $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ total und berechenbar, so dass $HALTEPROBLEM(i) = HALTEPROBLEM2(f(i))$.



- Definiere $f(i) = (i, i)$. Dann gilt: f ist total und berechenbar* und

$$
\begin{aligned}
& HALTEPROBLEM(i) \\
= & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{wenn } SEM_i(i) \text{ definiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \\
= & \; HALTEPROBLEM2(f(i))
\end{aligned}
$$

* Ein bisschen gemogelt, da bei uns berechenbare Funktionen keine Paare ausgeben können; ist aber leicht zu beheben.



- Wir erhalten:

$HALTEPROBLEM2$ berechenbar $\Longrightarrow$
$HALTEPROBLEM$ berechenbar. (Widerspruch)

Noch mehr unlösbare Probleme

Das Korrektheitsproblem

- Eingabe: Ein *while*-Programm P und eine Funktion $f : \mathbb{N}^j \longrightarrow \mathbb{N}$
- Ausgabe: 1, falls P die Funktion f berechnet.
  0 sonst.

Das Äquivalenzproblem

- Eingabe: Zwei $while$-Programme P und P'
- Ausgabe: 1, falls $SEM_P = SEM_{P'}$.
  0, sonst.

Der Satz von Rice

- Eingabe: Ein $while$-Programm P und eine (nicht triviale) Eigenschaft E berechenbarer Funktionen.
- Ausgabe: 1, falls P Eigenschaft E erfüllt.
  0, sonst.

Sei M die Menge aller berechenbaren Funktionen.

Beispiele für nicht triviale Eigenschaften:

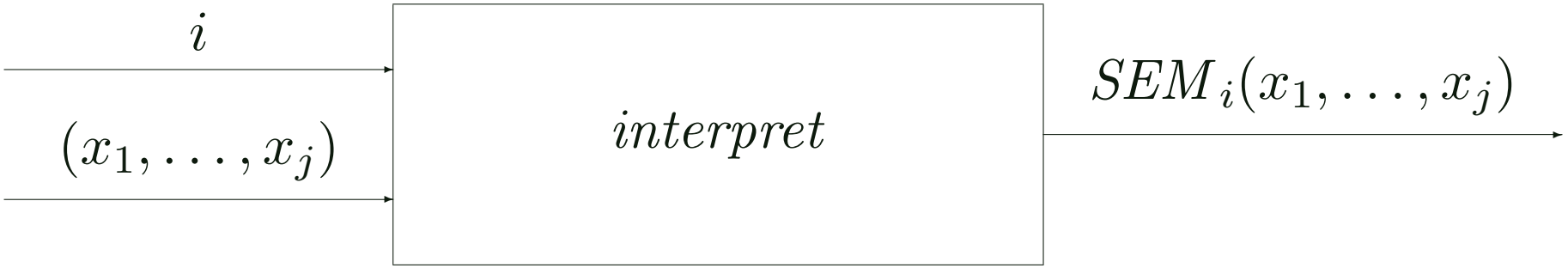
- $\{f \in M \mid f(x) = 3 \text{ für alle } x \in \mathbb{N}\}$
- $\{f \in M \mid f \text{ ist total}\}$

Eine Eigenschaft $E \subseteq M$ ist nicht trivial, falls $E \neq \emptyset$ und $E \neq M$.

Existenz eines universellen *while*-Programms — ein lösbares Problem

Universelle Funktion

- Eingabe:
  - Index i eines $while$-Programms
  - $(x_1, \ldots, x_j) \in \mathbb{N}^j$
- Ausgabe: $SEM_i(x_1, \ldots, x_j)$.



Berechenbarkeit der universellen Funktion

Theorem

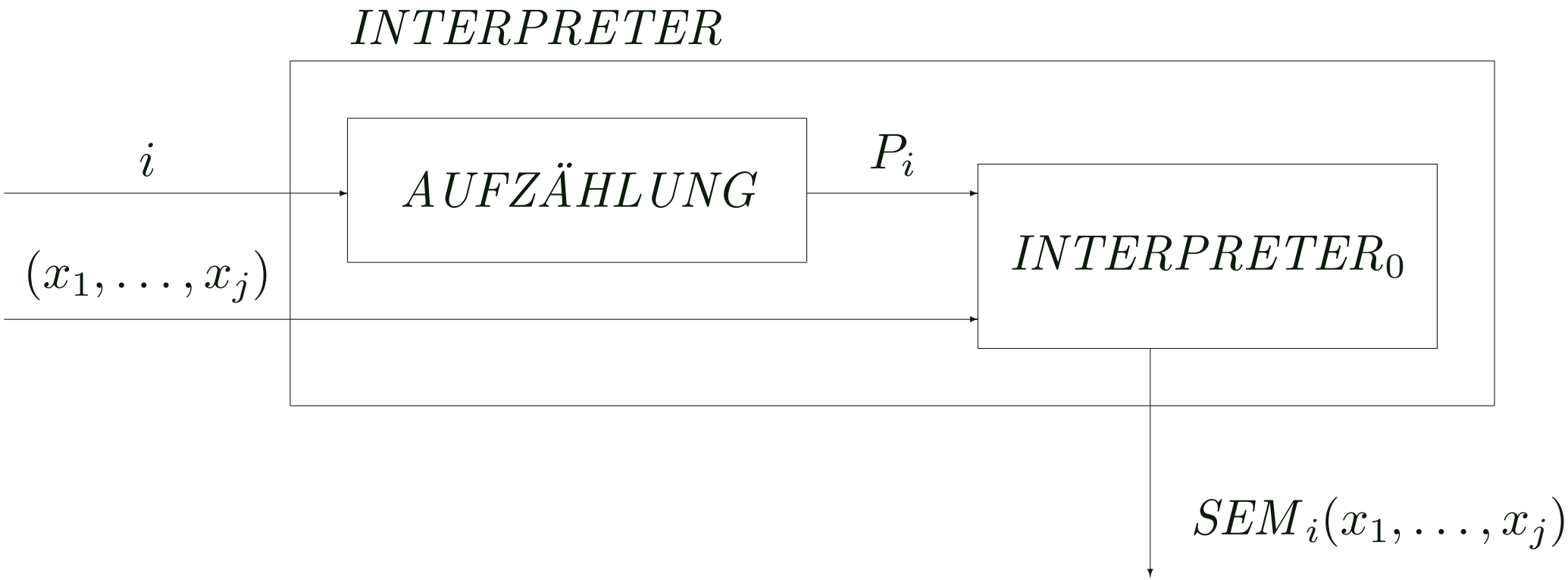
Die partielle Funktion $interpret: \mathbb{N}^{j+1} \longrightarrow \mathbb{N}$, die für alle $j \in \mathbb{N}$ definiert ist durch

$$interpret(i, x_1, \ldots, x_j) = SEM_i(x_1, \ldots, x_j),$$

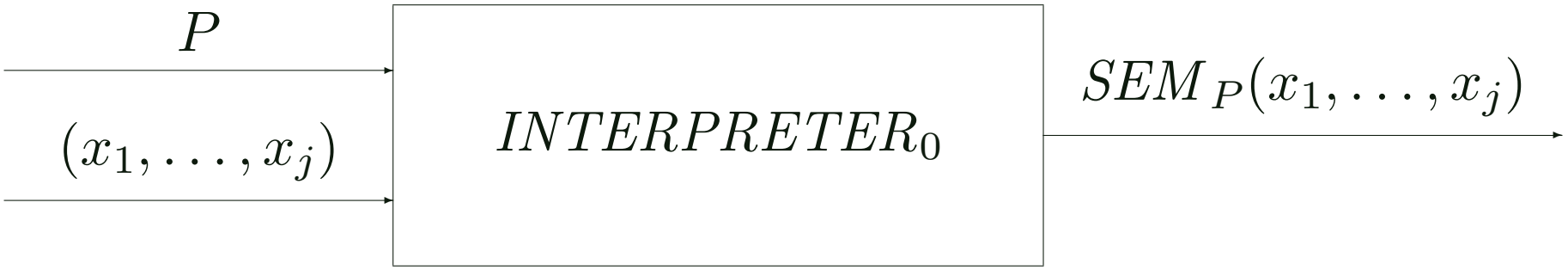
ist berechenbar.

Beachte: Gemäß der Churchschen These ist $interpret$ berechenbar, falls es einen Algorithmus für $interpret$ gibt.

PASCALchen-Interpreter als universelle Funktion



Algorithmus für $INTERPRETER_0$



1. Wandle das k-variable Programm P in sein Flussdiagramm um.
2. Wandle $(x_1, \ldots, x_j)$ in eine Eingabe a um.
3. Berechne P für Eingabe a.
4. Gib bei Termination den Wert von $X1$ aus.

Grenzlinien zwischen Berechenbarem und Unberechenbarem

Die Funktion

$$halt_1(x,y) = \begin{cases} y & \text{wenn } SEM_x(x) \text{ definiert ist} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar.

- Algorithmus: (1) Berechne $P_x(x)$. (2) Gib y aus.

Die Funktion

$$halt_2(x,y) = \begin{cases} y & \text{wenn } SEM_x(x) \text{ definiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht berechenbar.

- Reduktion von $HALTEPROBLEM$ auf $halt_2$:

  Definiere $f(i) = (i,1)$ (total und berechenbar). Dann gilt $HALTEPROBLEM(i) = halt_2(f(i))$.

Die Funktion

$$halt_3(x,y) = \begin{cases} f(y) & \text{wenn } SEM_x(x) \text{ definiert ist} \\ g(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar, falls

$$g(y) \text{ definiert } \Longrightarrow f(y) \text{ definiert und } f(y) = g(y).$$

Beispiel

$$f(y) = \begin{cases} y^2 & \text{für } y < 200 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} y^2 & \text{für } y < 100 \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion

$$halt_3(x,y) = \begin{cases} f(y) & \text{wenn } SEM_x(x) \text{ definiert ist} \\ g(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar, falls

$$g(y) \text{ definiert } \Longrightarrow f(y) \text{ definiert und } f(y) = g(y).$$

- Algorithmus (Skizze):
  (a) Berechne gleichzeitig $g(y)$ und $SEM_x(x)$.
  (b) Terminiert eines von beiden, gib $f(y)$ aus.

$$halt_4(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } P_x \text{ mit Eingabe } y \text{ nach} \\ & \text{spätestens } z \text{ Schritten hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist berechenbar.

- Algorithmus (Skizze):
  (a) $count := 0$
  (b) Solange $count < z$ und die Berechnung von $P_x(x)$ noch nicht zu Ende ist:
    i. berechne nächsten Schritt von $P_x(x)$
    ii. $count := succ(count)$
  (c) Falls die Berechnung von $P_x(x)$ zu Ende ist, gib 1 aus, sonst 0.

Ein merkwürdiges Beispiel

$$foggy(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \pi \text{ eine } 5\text{er} - \text{Sequenz} \\ & \text{der Länge } x \text{ enthält} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Fall: π enthält 5er-Sequenzen beliebiger Länge:
   $foggy(x) = 1$ für alle x.
2. Fall: Maximale 5er-Sequenz in π hat die Länge k:

$$foggy(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \leq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $foggy$ berechenbar.

Problem: Man weiß nicht, welcher Fall zutrifft.

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Dieser Kurs beinhaltete folgende Themen:

1. Automatentheorie
2. Formale Sprachen
3. Berechenbarkeit

Endliche Automaten

- erkennen genau die regulären Sprachen
- Äquivalenz von nichtdeterministischen und deterministischen endlichen Automaten (Potenzautomat)
- korrekte Übersetzung in rechtslineare Grammatiken
- schnelle Worterkennung,
- werden in vielen Bereichen praktisch eingesetzt (Model-Checking, UML, XML-Parser, Kontrollbedingungen usw.),
- können keine gängigen Programmiersprachen erkennen

Kellerautomaten

- erkennen genau die kontextfreien Sprachen
- deterministische Kellerautomaten können weniger Sprachen erkennen als nichtdeterministische
- können Programmiersprachen erkennnen
- deterministische Kellerautomaten werden im Compilerbau eingesetzt
- können nicht alle algorithmisch beschreibbaren Sprachen erkennen

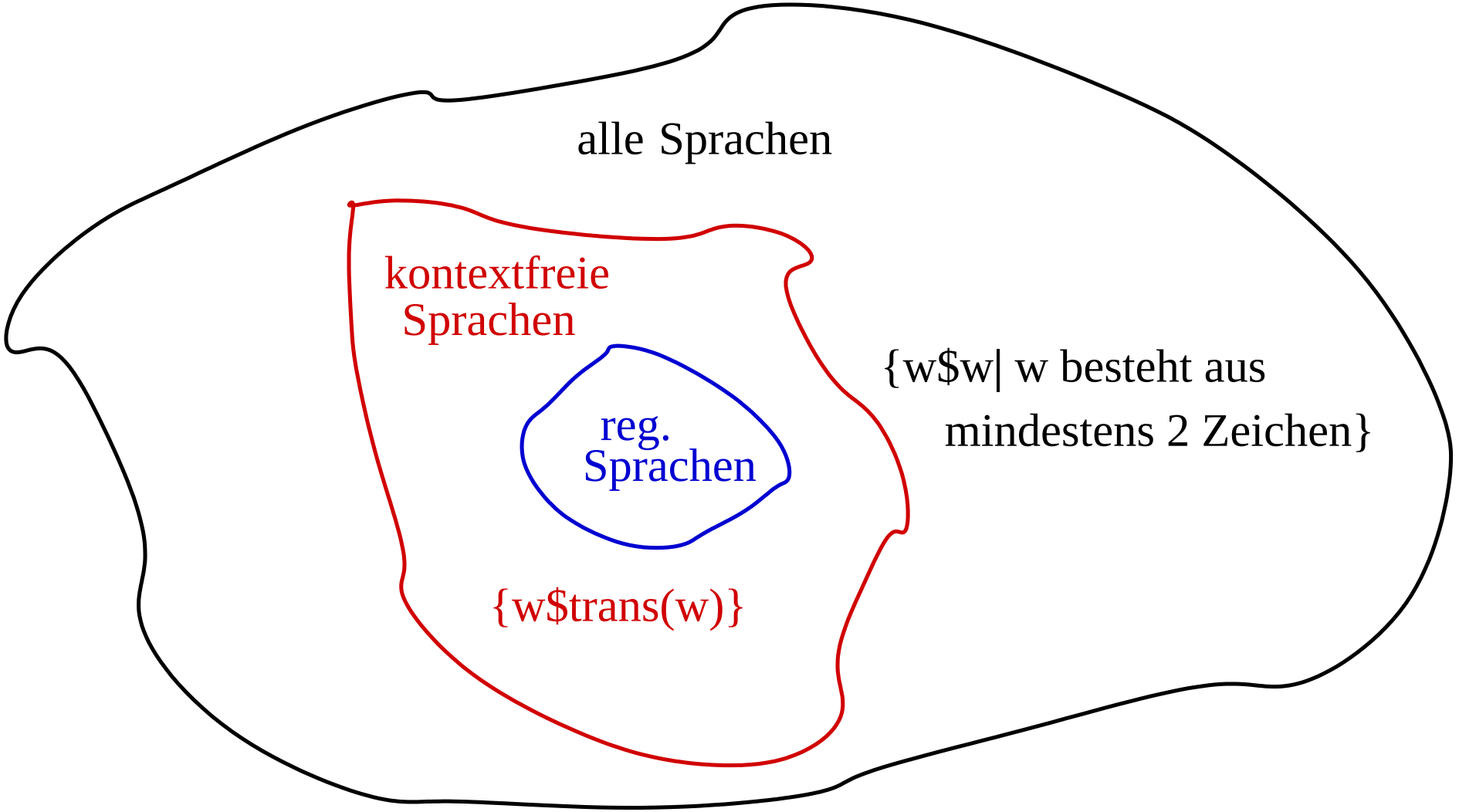
Reguläre Ausdrücke

- Beschreibungsmittel für die regulären Sprachen
- finden Anwendung im Compilerbau, Softwaretechnik, Webbrowsern usw.

Grammatiken

- kontextfreie Grammatiken
  - erzeugen genau die kontextfreien Sprachen
  - lange Ableitungen lassen sich in viele kleine zerlegen (Kontextfreiheitslemma)
  - korrekte Übersetzung in Kellerautomaten
- Rechtslineare Grammatiken
  - sind eine Teilmenge der kontextfreien Grammatiken
  - erzeugen genau die regulären Sprachen
  - erzeugen Wörter von links nach rechts

Sprachklassen



Reguläre Sprachen

- werden von endlichen Automaten erkannt
- werden von regulären Ausdrücken beschrieben
- werden von rechtslinearen Grammatiken erzeugt
- genügend lange Wörter sind pumpbar (Pumping-Lemma)
- Wortproblem entscheidbar
- Leerheitsproblem entscheidbar

Kontextfreie Sprachen

- werden von Kellerautomaten erkannt
- werden von kontextfreien Grammatiken erzeugt
- genügend lange Wörter sind pumpbar (Pumping-Lemma)

Abschlusseigenschaften regulärer und kontextfreier Sprachen

	Regulär	Kontextfrei
Vereinigung	+	+
Konkatenation	+	+
Kleene Hülle	+	+
Schnitt	+	-
Komplement	+	-

+: In diesem Kurs behandelt.

Berechenbarkeit

- $while$-Progamme als Berechenbarkeitsmodell
- Churchsche These
- Effektive Aufzählbarkeit der $while$-Programme
- Unlösbarkeit des Halteproblems
- Existenz eines universellen $while$-Programms

Ausblick

Theoretische Informatik 2 umfasst folgende Themen:

- Formale Sprachen (Fortführung)
- Berechenbarkeit (Fortführung)
- Komplexitätstheorie

Formale Sprachen

- Welche allgemeineren Grammatiktypen gibt es, und wie hängen diese mit den bisher betrachteten zusammen?
- Für welche Sprachklassen ist das Wortproblem (noch) entscheidbar?
- Algorithmen für die Lösung des Wortproblems

Berechenbarkeit

- Weitere Berechenbarkeitsmodelle (Turingmaschinen, rekursive Funktionen)
- Zusammenhang zu $while$-Programmen

Komplexitätstheorie

- Wie lange dauert es mindestens und höchstens, bis ein Computer ein Problem berechnet hat?
- Welche Berechnungszeiten sind (noch) akzeptabel?
- Wie komplex sind konkrete Algorithmen, wie z.B. Sortieren oder Matrizenmultiplikation?