Kontextfreie Grammatiken und Sprachen

Kontextfreie Grammatik: $G = (N, T, P, S)$ mit

- N: Menge nichtterminaler Zeichen,
- T: Menge terminaler Zeichen mit $N \cap T = \emptyset$,
- $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$: endliche Menge kontextfreier Produktionen
- $S \in N$: Startsymbol

- Schreibweise für Produktionen $(A, u) \in P$: $A ::= u$
- Abkürzung für $A ::= u_1, A ::= u_2, \ldots A ::= u_k$:

$$A ::= u_1 | u_2 | \cdots | u_k$$

Beispiel

$$G_{bracket_0} = (\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)$$

Ableitungen

Direkte Ableitung:

$$w = xAy \xrightarrow[p]{} xuy = w'$$

mit $w, w', x, y, u, v \in (N \cup T)^*$, $p = (A ::= u)$.

- **Schreibweise**: $w \xrightarrow[P]{} w'$,
  falls P eine Menge von Produktionen ist mit $p \in P$.

- **Beispiel:** $aSb \xrightarrow[S ::= aSb]{} a^2Sb^2$

Ableitung (Iteration direkter Ableitungen)

$$w_0 \underset{p_1}{\longrightarrow} w_1 \underset{p_2}{\longrightarrow} \cdots \underset{p_n}{\longrightarrow} w_n$$

für $w_0, \ldots, w_n \in (N \cup T)^*$ und Produktionen $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$

Schreibweisen:

- $w_0 \underset{P}{\longrightarrow} \cdots \underset{P}{\longrightarrow} w_n$ oder $w_0 \overset{n}{\underset{P}{\longrightarrow}} w_n$ oder $w_0 \overset{*}{\underset{P}{\longrightarrow}} w_n$,
  falls $p_1, \ldots, p_n \in P$.
- $w \overset{*}{\longrightarrow} w'$, falls P aus dem Kontext klar ist.

Beispiel

$$G_{bracket_0} = (\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)$$

$$S \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} aSb \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} a^2Sb^2 \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} a^3Sb^3 \underset{S ::= \lambda}{\longrightarrow} a^3b^3$$

Nullableitung

$$w \xrightarrow[P]{0} w$$

für alle $w \in (N \cup T)^*$.

Erzeugte Sprache

- $G = (N, T, P, S)$: kontextfreie Grammatik

Erzeugte Sprache

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \xrightarrow[P]{*} w\}$$

Beispiel

- $G_{bracket_0} = (\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)$

$$S \underset{S ::= \lambda}{\longrightarrow} \lambda, \quad S \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} aSb \underset{S ::= \lambda}{\longrightarrow} ab$$
$$S \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} aSb \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} a^2Sb^2 \underset{S ::= \lambda}{\longrightarrow} a^2b^2$$
$$S \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} aSb \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} a^2Sb^2 \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} a^3Sb^3 \underset{S ::= \lambda}{\longrightarrow} a^3b^3$$
$$\ldots$$
$$S \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} aSb \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} a^2Sb^2 \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} a^3Sb^3 \underset{S ::= aSb}{\longrightarrow} \cdots \underset{S ::= \lambda}{\longrightarrow} a^nb^n$$

- $L(G_{bracket_0}) = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Kontextfreiheitslemma

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $u \xrightarrow[P]{n} v$ eine Ableitung der Länge n und $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ eine Zerlegung von u in k Teilwörter.
Dann gibt es k Ableitungen $u_i \xrightarrow[P]{n_i} v_i$, so dass $v = v_1 \cdots v_k$ und $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Fragestellungen

- Sind kfG's kompositional?
- Wie hängen endliche Automaten und kfG's zusammen?
- Ist für kfG's das Wortproblem schnell lösbar?
- Was können kfG's nicht?

Vereinigung

Seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$, $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ kfG's mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Vereinigung

$G_1 + G_2 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_{\text{neu}}\}, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S_{\text{neu}} ::= S_1 \mid S_2\}, S_{\text{neu}})$

Satz

$L(G_1 + G_2) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

Konkatenation

Seien $G_1 = (N_1, T, P_1, S_1)$, $G_2 = (N_2, T, P_2, S_2)$ kfG's mit $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Konkatenation

$G_1 \circ G_2 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_{\text{neu}}\}, T, P_1 \cup P_2 \cup \{S_{\text{neu}} ::= S_1 S_2\}, S_{\text{neu}})$

Satz

$L(G_1 \circ G_2) = L(G_1)L(G_2)$.

Kleene Hülle

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kfG.

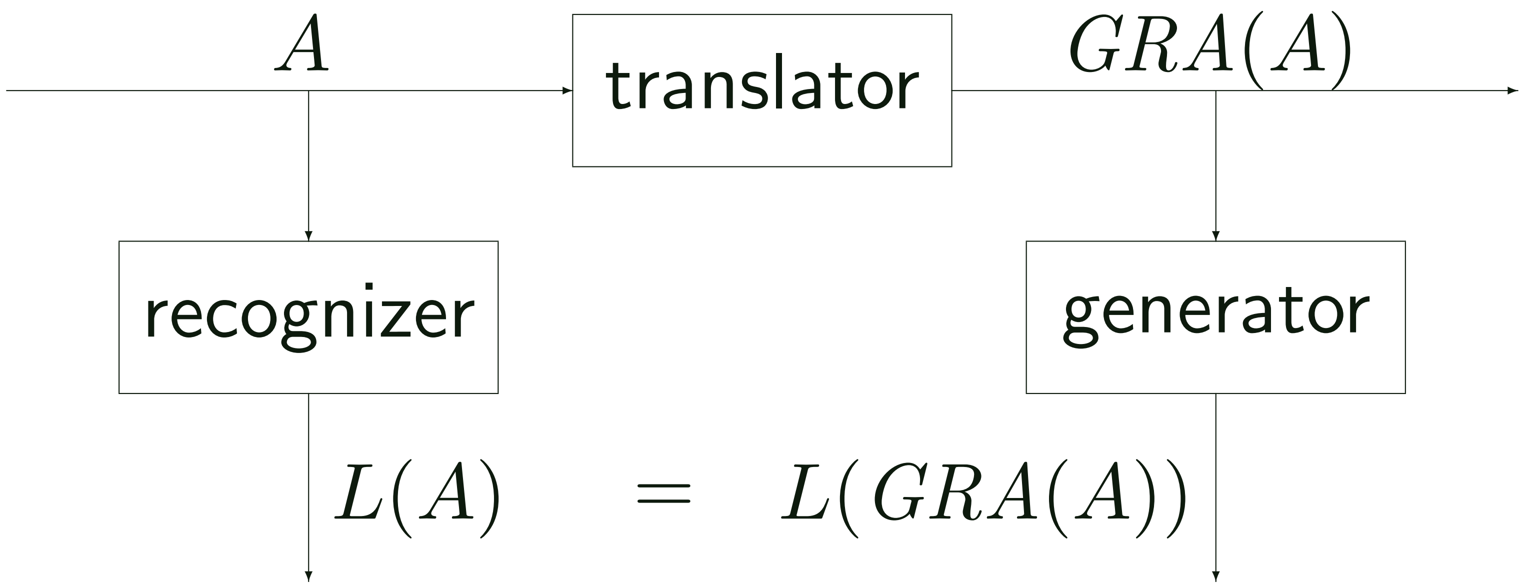
Kleene Hülle

$G_* = (N \cup \{S_{\text{neu}}\}, T, P \cup \{S_{\text{neu}} ::= \lambda \mid S S_{\text{neu}}\}, S_{\text{neu}})$

Satz

$L(G_*) = L(G)^*$.

Übersetzung endlicher Automaten in (rechtslineare) Grammatiken



Übersetzung (2)

Sei $A = (Z, I, d, s_0, F)$ ein NEA.

$GRA(A)$

$GRA(A) = (Z, I, P_A, s_0)$ mit

$P_A = \{s ::= xs' \mid s' \in d(s, x)\} \cup \{s'' ::= \lambda \mid s'' \in F\}$

Satz

$L(A) = L(GRA(A))$.