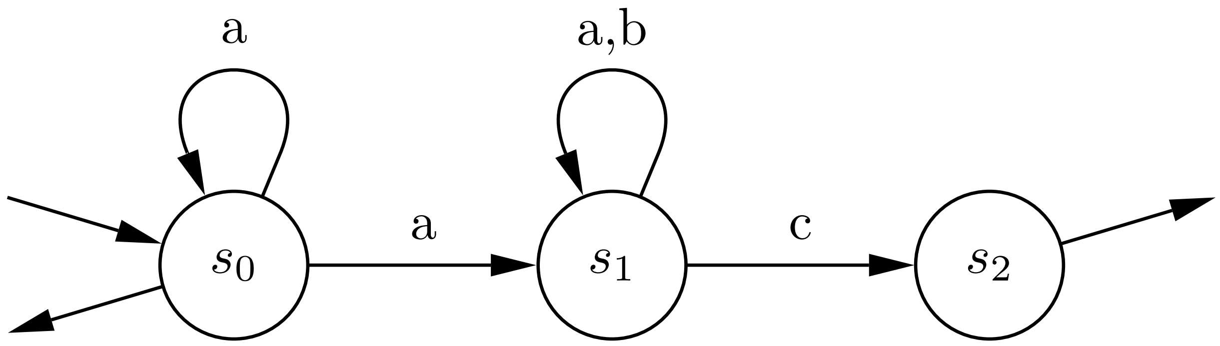
Definition

Endliche Automaten

Ein endlicher Automat ist ein System $A = (Z, I, d, s_0, F)$ mit

- Z: endliche Menge von Zuständen,
- I: endliches Eingabealphabet,
- d: Zustandsüberführung mit $d \subseteq Z \times I \times Z$
- $s_0 \in Z$: Startzustand,
- $F \subseteq Z$: Endzustände.

Beispiel 1



Akzeptiert u.a. das Wort $aabc$:

- $(s_0, aabc) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_0, abc) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_1, bc) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_1, c) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_2, \lambda)$
- $(s_0, aabc) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_1, abc) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_1, bc) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_1, c) \vdash\!\!\!\!\longrightarrow (s_2, \lambda)$

Fortgesetzte Zustandsüberführung

Die fortgesetzte Zustandsüberführung verarbeitet Wörter statt Zeichen.

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$

Für alle $s, s', s'' \in Z$, $x \in I$, $w \in I^*$:

- $d^*(s, \lambda) = \{s\}$,
- $d^*(s, wx) = \bigcup_{s' \in d^*(s,w)} d(s', x)$.

Erkannte Sprache

Die erkannte Sprache besteht aus allen Wörtern, die der Automat ausgehend vom Startzustand einlesen kann, so dass nach dem Einlesen ein Endzustand erreicht wird.

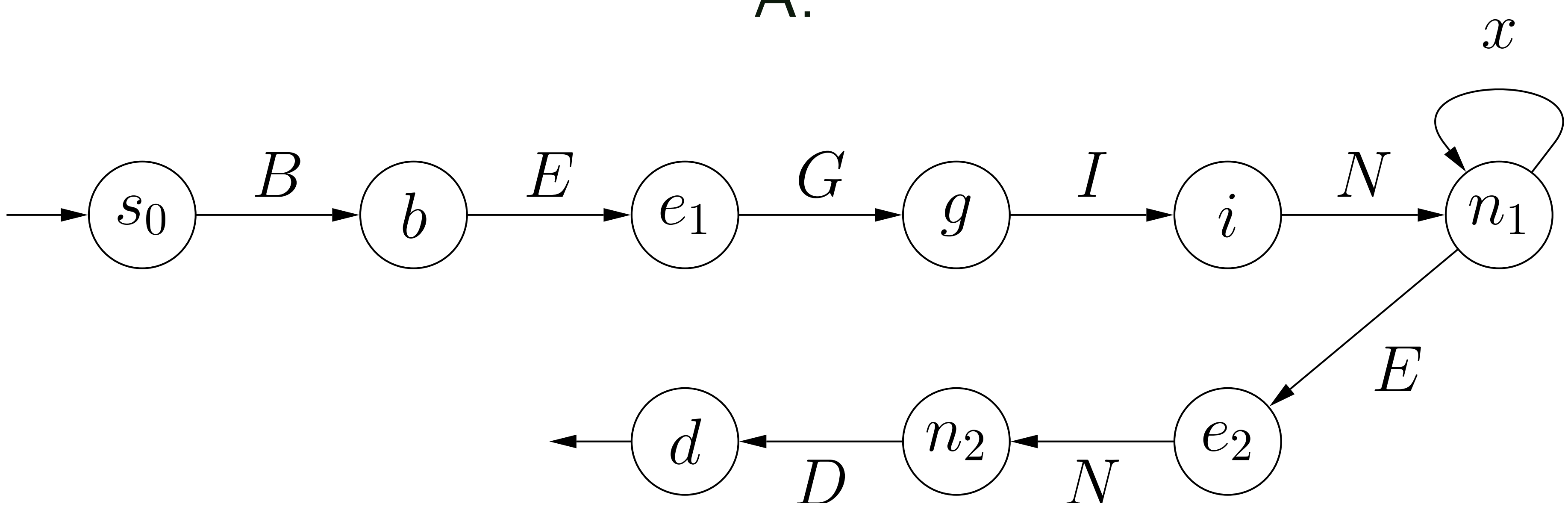
Erkannte Sprache

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$

$$L(A) = \{w \in I^* \mid d^*(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Beispiel

A:



$$L(A) = \{BEGINuEND \mid u \in I^*\}$$

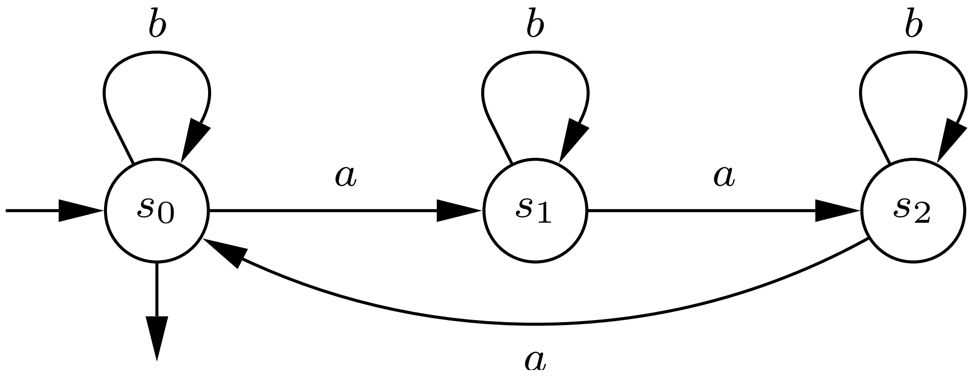
Deterministische Endliche Automaten

Definition

Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) ist ein System $A = (Z, I, d, s_0, F)$ mit

- Z: endliche Menge von Zuständen,
- I: endliches Eingabealphabet,
- $d\colon Z \times I \to Z$: Abbildung
- $s_0 \in Z$: Startzustand,
- $F \subseteq Z$: Endzustände.

Beispiel



Gegeben: DEA $A = (Z, I, d, s_0, F)$

Fortgesetzte Zustandsüberführung

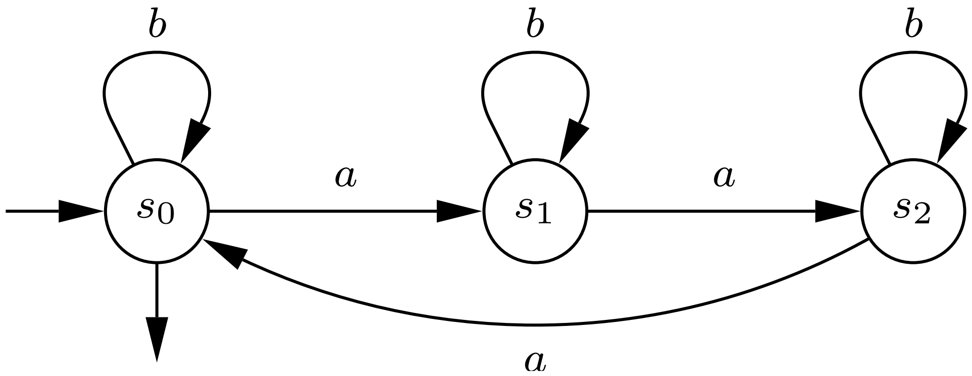
Für alle $s, s', s'' \in Z$, $x \in I$, $w \in I^*$:

- $d^*(s, \lambda) = s$;
- $d^*(s, wx) = d(d^*(s, w), x)$.

Erkannte Sprache

$$L(A) = \{w \in I^* \mid d^*(s_0, w) \in F\}$$

Beispiel



Erkannte Sprache:

$$\{w \in \{a, b\}^* \mid count(a, w) \mod 3 = 0\}$$

Potenzautomat

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$.

$$\mathcal{P}(A) = (\mathcal{P}(Z), I, D, \{s_0\}, F_{\mathcal{P}})$$

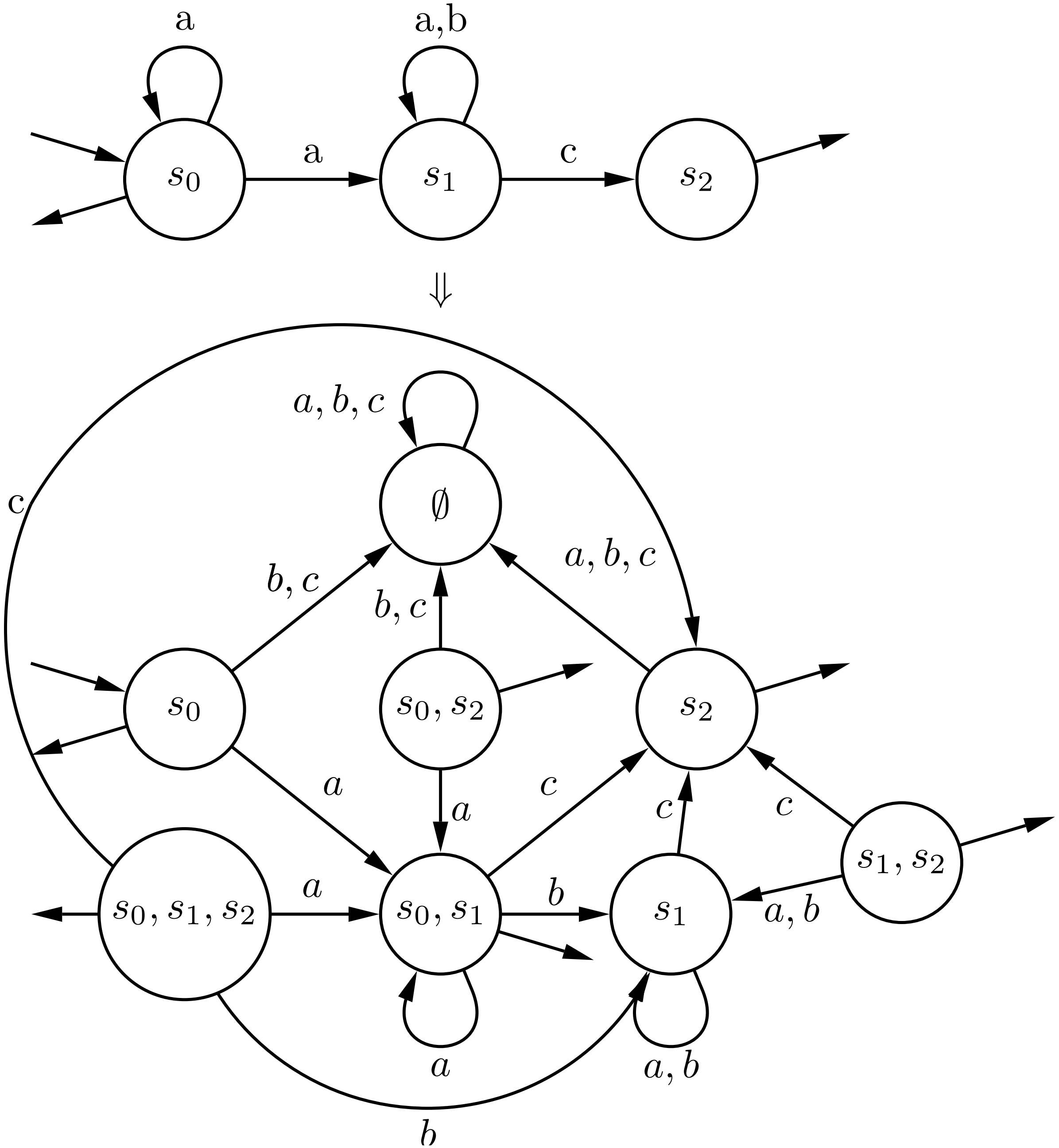
- $\mathcal{P}(Z)$: *Potenzmenge* von Z;
- $D\colon \mathcal{P}(Z) \times I \to \mathcal{P}(Z)$ mit

$$D(S, x) = \bigcup_{s \in S} d(s, x)$$

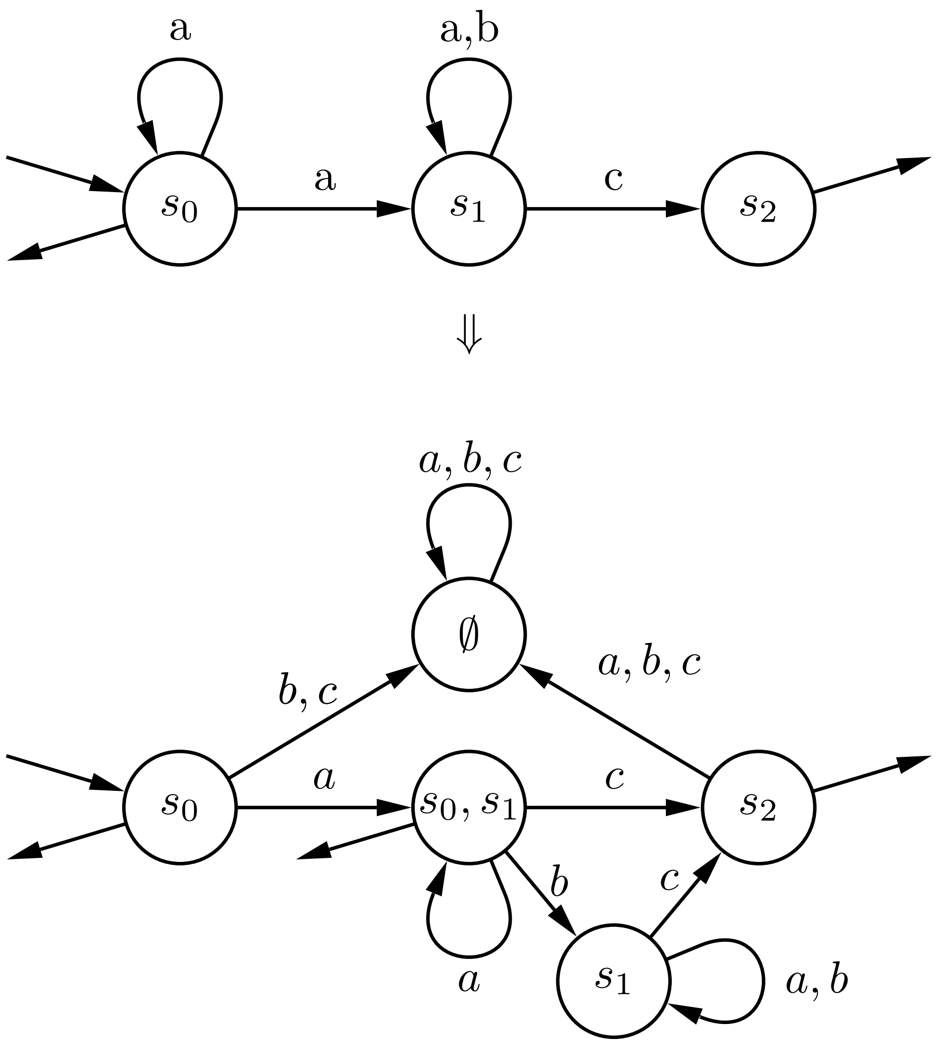
für alle $S \in \mathcal{P}(Z)$, $x \in I$;

- $F_{\mathcal{P}} = \{S \in \mathcal{P}(Z) \mid S \cap F \neq \emptyset\}$.

Beispiel:


a
a,b
s_0
a
s_1
c
s_2
⇓
a, b, c
c
$\emptyset$
a, b, c
b, c
b, c
s_0
s_0, s_2
s_2
a
a
c
c
c
s_1, s_2
s_0, s_1, s_2
a
s_0, s_1
b
s_1
a, b
a
a, b
b

Ein optimierter Potenzautomat



Äquivalenz von nichtdeterministischen und deterministischen endlichen Automaten

Satz (Äquivalenz)
Sei $A = (Z, I, d, s_0, F)$ ein endlicher Automat. Dann gilt

$$L(A) = L(\mathcal{P}(A)).$$

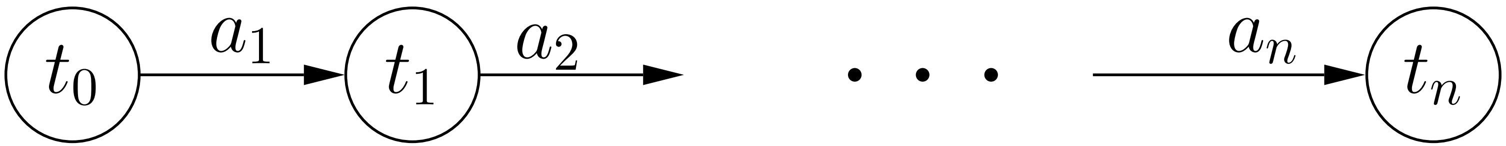
Wortproblem

Gegeben: eine Sprache $L \subseteq A^*$
(z.B. in Form eines endlichen Automaten).

Eingabe: Ein Wort $w \in A^*$.

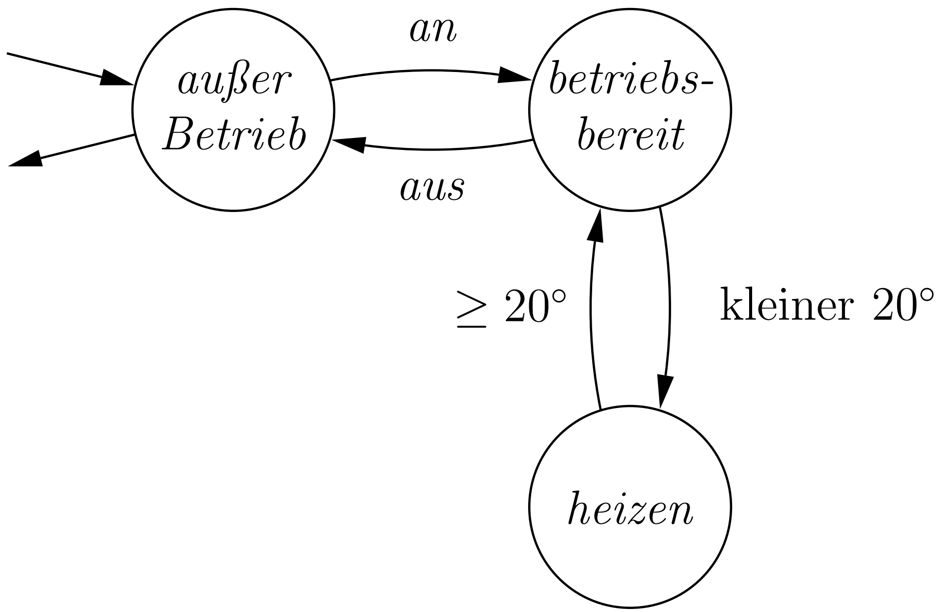
Ausgabe: Ja, falls $w \in L$
Nein, sonst.

Satz (schnelle Worterkennung)
Für von endlichen Automaten erkannte Sprachen ist das Wortproblem in linearer Zeit lösbar.



Lesedauer von $a_1 \ldots a_n$: n Schritte, da Folgezustände eindeutig sind.

Model-Checking (beispielhaft)



$\boxed{L(heating)}$: Menge aller möglichen Abläufe

$\boxed{L_{forbidden}}$: Alle verbotenen Abläufe.

Heating ist korrekt bezüglich $L_{forbidden}$, falls

$$L(heating) \cap L_{forbidden} = \emptyset.$$

Produktautomat (Parallelschaltung zweier Automaten)

Gegeben: deterministische endliche Automaten

$$A_1 = (Z_1, I, d_1, s_{01}, F_1),\ A_2 = (Z_2, I, d_2, s_{02}, F_2)$$

Produktautomat

$$A_1 \times A_2 = (Z_1 \times Z_2, I, d, (s_{01}, s_{02}), F_1 \times F_2)$$

mit $d((s_1, s_2), x) = (d_1(s_1, x), d_2(s_2, x))$ für alle $(s_1, s_2) \in Z_1 \times Z_2$ und $x \in I$.

Der Produktautomat erkennt den Durchschnitt

Satz

Seien $A_1 = (Z_1, I, d_1, s_{01}, F_1)$, $A_2 = (Z_2, I, d_2, s_{02}, F_2)$ deterministische endliche Automaten. Dann gilt

$$L(A_1 \times A_2) = L(A_1) \cap L(A_2).$$

Vereinigungsautomat

Gegeben: deterministische endliche Automaten

$$A_1 = (Z_1, I, d_1, s_{01}, F_1),\ A_2 = (Z_2, I, d_2, s_{02}, F_2)$$

Vereinigungsautomat

$$A_1 \cup A_2 = (Z_1 \times Z_2, I, d, (s_{01}, s_{02}), (F_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times F_2))$$

mit $d((s_1, s_2), x) = (d_1(s_1, x), d_2(s_2, x))$ für alle $(s_1, s_2) \in Z_1 \times Z_2$ und $x \in I$.

Der Vereinigungsautomat erkennt die Vereinigung

Satz

Seien $A_1 = (Z_1, I, d_1, s_{01}, F_1)$, $A_2 = (Z_2, I, d_2, s_{02}, F_2)$ deterministische endliche Automaten. Dann gilt

$$L(A_1 \cup A_2) = L(A_1) \cup L(A_2).$$