Zusammenhang zwischen Kellerautomaten und kontextfreien Sprachen

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es einen Kellerautomaten K, so dass $L(G) = L(K)$.

Für jeden Kellerautomaten K gibt es eine kontextfreie Grammatik G, so dass $L(K) = L(G)$. (Ohne Beweis)

Folgerung

$$\boxed{\mathcal{L}_{NKA} = \mathcal{L}_{KFS}.}$$

- $\mathcal{L}_{NKA}$: Klasse aller von nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannten Sprachen
- $\mathcal{L}_{KFS}$: Klasse der kontextfreien Sprachen

Ein paar Umformungen kontextfreier Grammatiken

- Nützlich für den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.
- Nützlich für die Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.

Eliminierung von λ-Produktionen

Eine Produktion der Form

$$A ::= \lambda$$

heißt λ-Produktion.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik $G_{\lambda-\mathrm{frei}}$ ohne λ-Produktionen, so dass

$$L(G) = L(G_{\lambda-\mathrm{frei}}) - \{\lambda\}.$$

Beispiel

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

1. Sammeln aller $A \in N$ mit $A \xrightarrow{*} \lambda$:
   - Alle $A \in N$, aus denen λ direkt ableitbar ist:

     $$M_0 = \{A, B\}$$

   - Hinzufügung aller $A \in N$, deren rechte Seiten nur aus Zeichen aus M_0 zusammengesetzt sind:

     $$M_1 = M_0 \cup \{S\} = \{A, B, S\}$$

Beispiel

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

- Hinzufügung aller $A \in N$, deren rechte Seiten nur aus Zeichen aus M_1 zusammengesetzt sind:

$$M_2 = M_1 \cup \emptyset = \{A, B, S\}$$

- Alle $A \in N$, aus denen λ in beliebig vielen Schritten ableitbar ist:

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cdots = \{A, B, S\}$$

Beispiel

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

---

2. Sukzessives Erweitern der Regelmenge durch Streichen der Zeichen $A \in M = \{A, B, S\}$ aus den rechten Regelseiten:
   - $P_0 = \{S ::= AB, A ::= aAA|\lambda, B ::= bBB|\lambda\}$
   - $P_1 = P_0 \cup \{S ::= A|B, A ::= aA, B ::= bB\}$
   - $P_2 = P_1 \cup \{S ::= \lambda, A ::= a, B ::= b\}$
   - $P_2 = P_2 \cup \emptyset = P_2$
   - $P' = P_2 = \{S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda\}$

3. Löschen aller λ-Produktionen aus P':

Aus

$$\{S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda\}$$

erhalten wir

$$P_{\lambda-\mathrm{frei}} = \{S ::= AB|A|B, A ::= aAA|aA|a, B ::= bBB|bB|b\}.$$

Konstruktion

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kfG.

1. (Sammeln aller $A \in N$ mit $A \xrightarrow{*} \lambda$.)
   - $M_0 = \{A \in N \mid A ::= \lambda\}$
   - $M_{i+1} = M_i \cup \{A \in N \mid A ::= w \in P, w \in M_i^*\}$
   - $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$

$M' = \{A \in N \mid A ::= \lambda\}$
repeat
$M := M'$;
$M' := M \cup \{A \in N \mid A ::= w \in P, w \in M^*\}$
until $M' = M$

2. (Konstruktion von $P_{\lambda-\text{frei}}$)
   - $P_0 = P$
   - $P_{i+1} = P_i \cup \{A ::= u_1 u_2 \mid A ::= u_1 B u_2 \in P_i, B \in M\}$
   - $P' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$
   - $P_{\lambda-\text{frei}} = P' - \{p \in P' \mid p = A ::= \lambda\}$
3. (Konstruktion von $G_{\lambda-\text{frei}}$)

$$G_{\lambda-\text{frei}} = (N, T, P_{\lambda-\text{frei}}, S)$$

Eliminierung von Kettenregeln

Eine Produktion der Form $A ::= B$ mit $B \in N$ heißt Kettenregel.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik $G_{KR-frei}$ ohne Kettenregeln, so dass

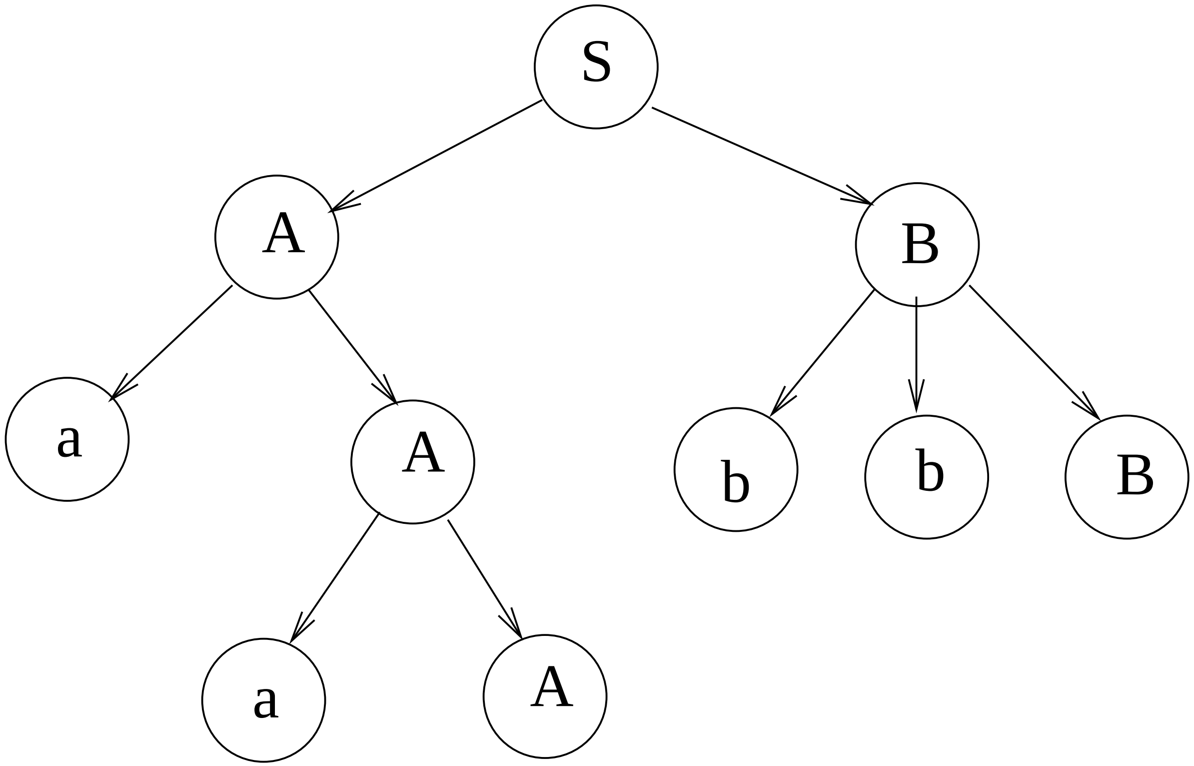
$$L(G) = L(G_{KR-frei}).$$

Ableitungsbäume

- Veranschaulichen Ableitungen kontextfreier Grammatiken
- Nützlich für den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen
- Konstuktion beruht auf dem Kontextfreiheitslemma
- Ermöglichen die Nutzung bekannter Baumeigenschaften für die Analyse von Ableitungen
- Spielen eine wichtige Rolle im Compilerbau

Baumdarstellung von Ableitungen

- $S \to AB \to aAB \to a^2AB \to a^2AbbB$



Definition

- Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ-Produktionen.
- Sei $X \xrightarrow[P]{n} w$ mit $X \in N \cup T$.

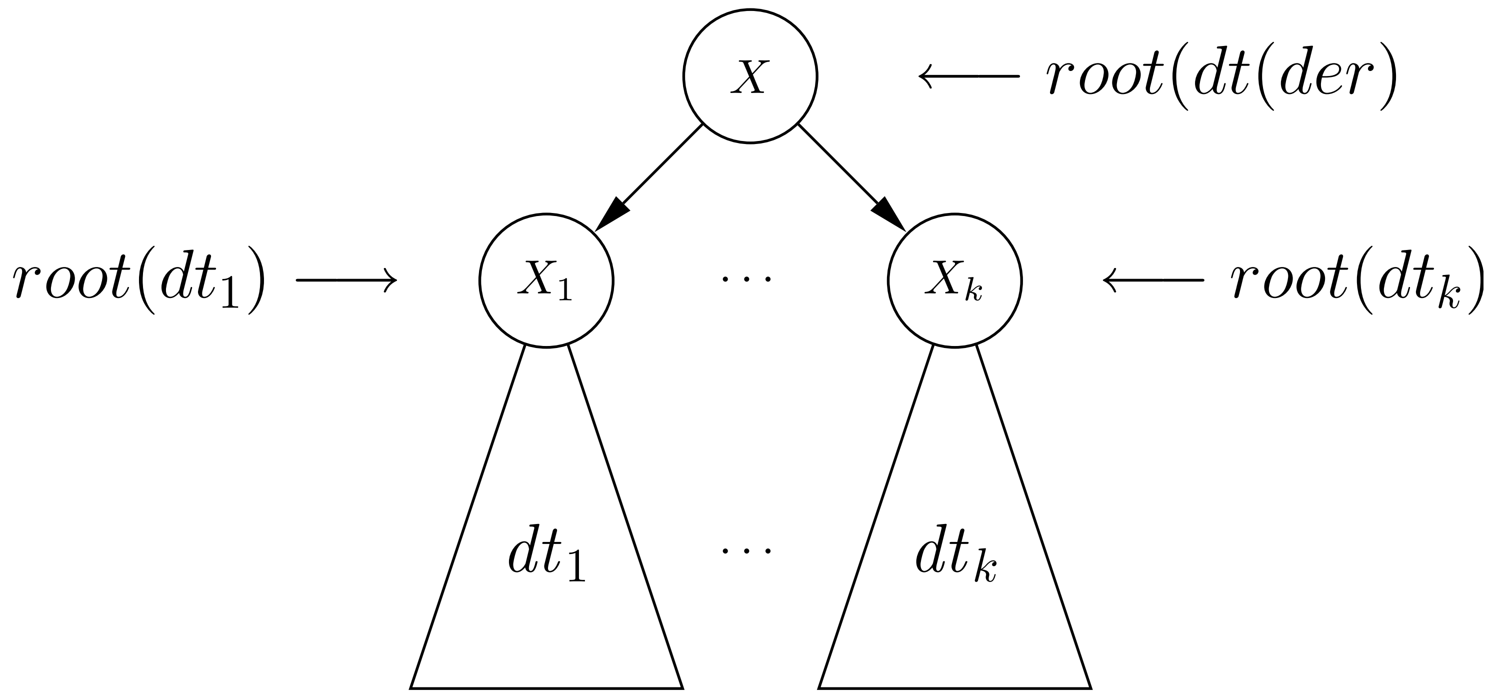
Dann ist der Ableitungsbaum $dt(X \xrightarrow[P]{*} w)$ rekursiv wie folgt definiert:

1. $dt(X \xrightarrow[P]{0} X)$:

$$X \longleftarrow root(dt(X \xrightarrow[P]{0} X))$$

- $height(dt(X \xrightarrow[P]{0} X)) = 0$ und $res(dt(X \xrightarrow[P]{0} X)) = X$

2. Sei $der : X \xrightarrow[P]{} X_1 \dots X_k \xrightarrow{n} w$. Seien $X_i \xrightarrow[P]{n_i} w_i$ $(n_i \leq n)$ die korrespondierenden Ableitungen gemäß dem Kontextfreiheitslemma. Sei $dt_i = dt(X_i \xrightarrow[P]{n_i} w_i)$. Dann hat der Ableitungsbaum $dt(der)$ die Form



- $height(dt(der)) = 1 + \max\{height(dt_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$
- $res(dt(der)) = U = res(dt_1) \cdots res(dt_k)$.

Beziehung zwischen Baumhöhe und Resultatslänge

Beobachtung 1

Sei b die Länge der längsten rechten Seite von Produktionen aus P. Dann gilt für alle Ableitungsbäume dt:

$$length(res(dt)) \leq b^{height(dt)}.$$

Ein langer Weg von der Wurzel zu einem Blatt

Beobachtung 2

In jedem Ableitungsbaum gibt es mindestens einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt, der so lang ist, wie der Baum hoch ist.

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Zu jeder kontextfreien Sprache L existiert ein $p \in \mathbb{N}$, so dass gilt:
Ist $z \in L$ mit $length(z) \geq p$, dann lässt sich z schreiben als $z = uvwxy$, wobei $length(vwx) \leq p$ ist und $vx \neq \lambda$, und für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$uv^iwx^iy \in L.$$