Kellerautomaten

Spracherkennung (Syntaxanalyse)

- Algorithmus gesucht, der für $L \subseteq T^*$ (möglichst schnell) entscheidet, ob $w \in L$ (Lösung des Wortproblems)

Grammatik	Automat	Aufwand
rechtslinear	endlich	linear
kontextfrei	?	?

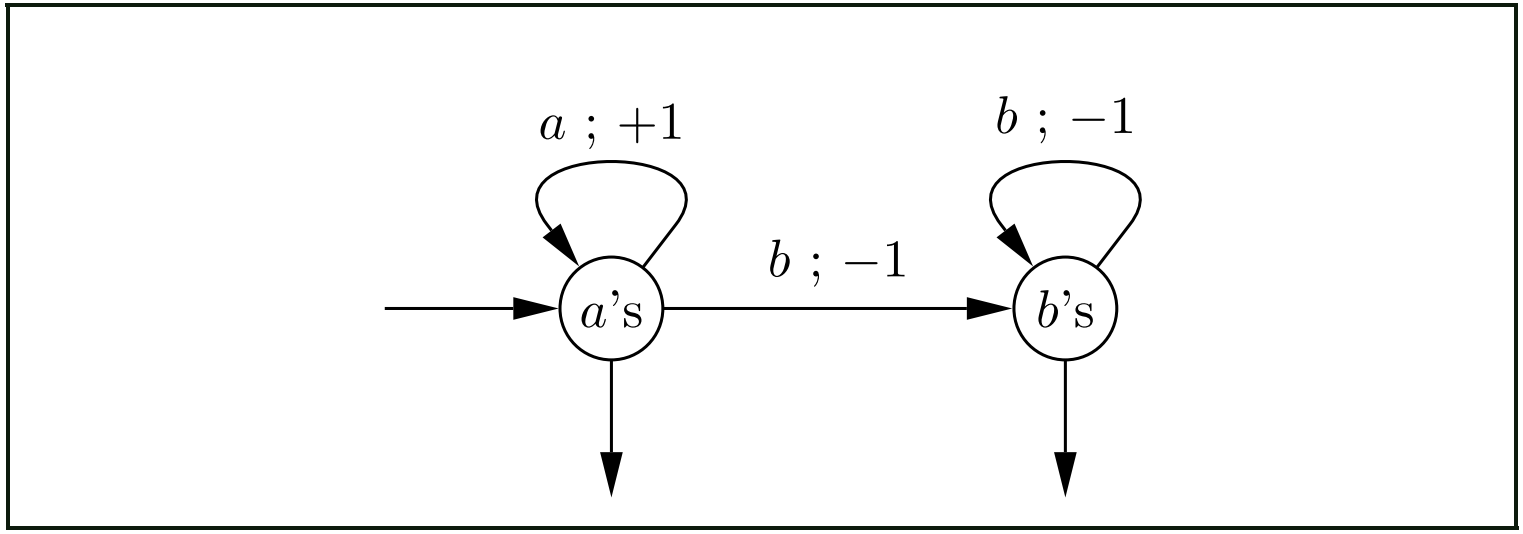
Problem: endliche Automaten können nicht unbeschränkt mitzählen und sich keine unbeschränkt langen Teilwörter merken

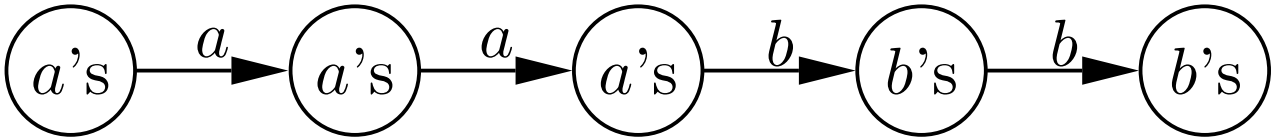
Beispiel: Klammerstrukturen

$$L_{bal} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- nicht regulär
- kontextfrei erzeugt durch $S ::= aSb \mid \lambda$

Idee: Endlicher Automat mit Zähler





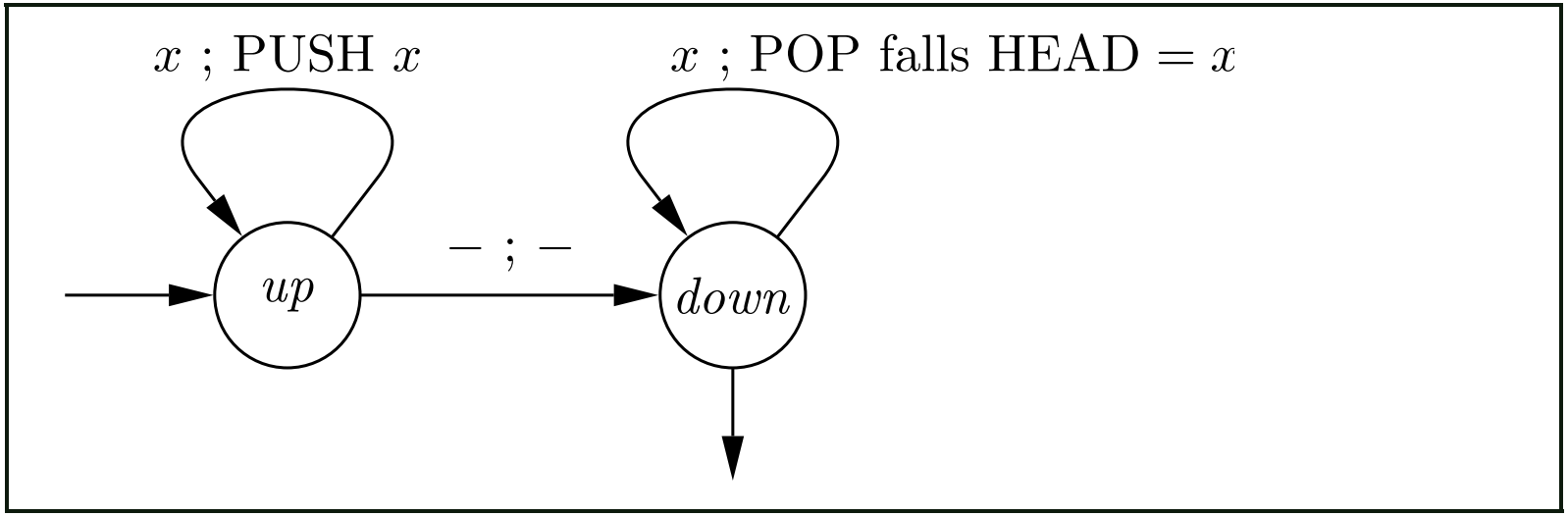
Zähler	0	1	2	1	0

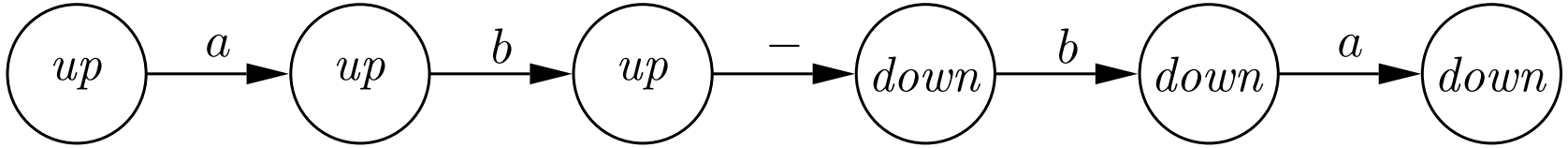
Beispiel: Palindrome

$$L_{pde} = \{wtrans(w)\}$$

- nicht regulär
- kontextfrei erzeugt durch $S ::= xSx \mid \lambda$ f.a. $x \in T$

Endlicher Automat mit Keller/Speicher





Keller	λ	a	ba	ba	a	λ

Nichtdeterministischer Kellerautomat

Idee:

endlichen Automaten mit Zusatzspeicher in Form eines Kellers (Stapel, Stack) mit Speicheroperationen pro Übergang

Keller über X:

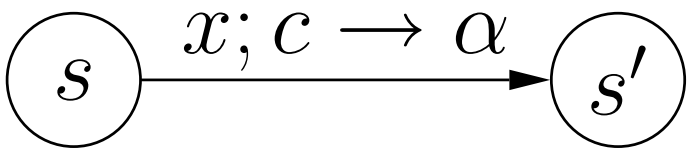
X^* mit den Operationen push, head, pop
(d.h. $push(x, u) = xu$, $head(xu) = x$, $pop(xu) = u$ für alle $x \in X$, $u \in X^*$)

Nichtdeterministischer Kellerautomat

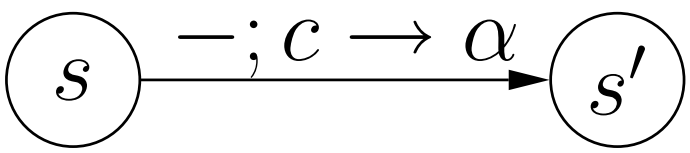
$$K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0) \text{ mit}$$

- Z: endliche Menge von Zuständen
- I: endliches Eingabealphabet mit $- \notin I$
- C: endliche Menge von Kellersymbolen
- d: $Z \times (I \cup \{-\}) \times C \rightsquigarrow Z \times C^*$: Zustandsüberführung
- $s_0 \in Z$: Startzustand
- $F \subseteq Z$: Endzustände
- $c_0 \in C$: initiales Kellersymbol

Graphische Darstellung

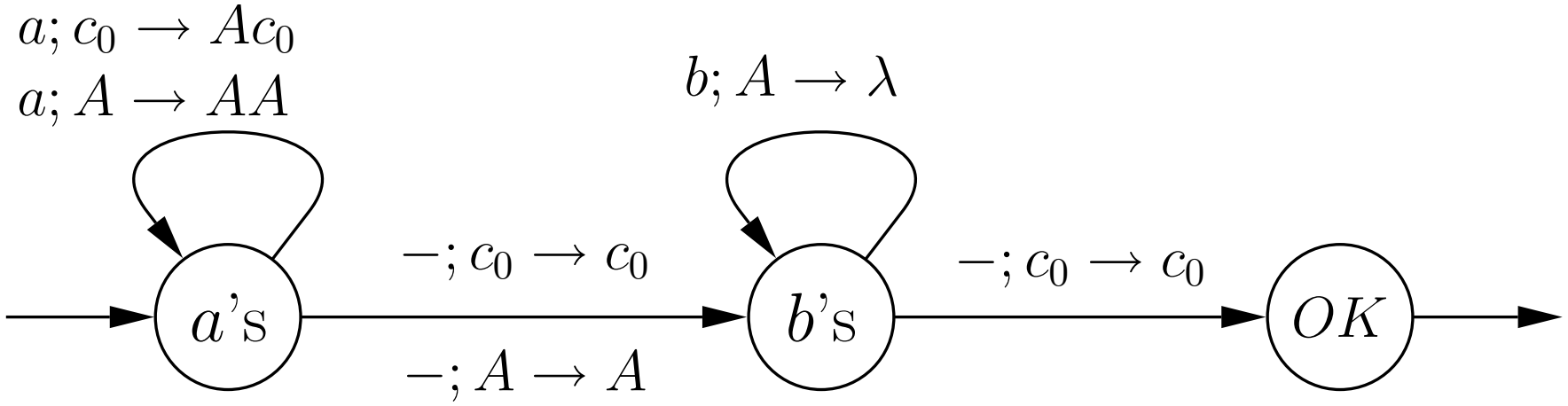


für $(s', \alpha) \in d(s, x, c)$



für $(s', \alpha) \in d(s, -, c)$

Beispiel



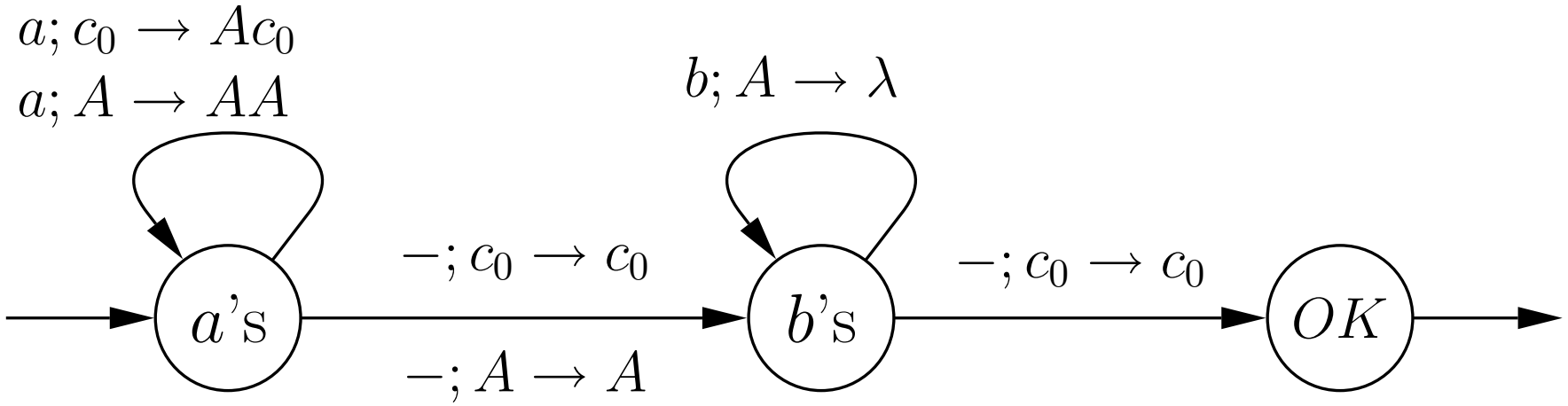
Konfiguration

Eine Konfiguration $con = (s, w, \gamma)$ besteht aus einem Zustand $s \in Z$, einem Wort $w \in I^*$ und einem Kellerwort $\gamma \in C^*$.

Wichtige Konfigurationen

- Anfangskonfiguration: $con_0 = (s_0, w, c_0)$
- Endkonfiguration: $con_F = (s, \lambda, \gamma)$ mit $s \in F$

Beispiel



- Konfiguration: $(b's, bb, AAc_0)$
- Anfangskonfiguration: $(a's, aabb, c_0)$
- Endkonfiguration: (OK, λ, c_0)

Folgekonfiguration

$(s, xv, c\gamma) \vdash\!\!\!- (s', v, \alpha\gamma)$, falls $(s', \alpha) \in d(s, x, c)$

$(s, v, c\gamma) \vdash\!\!\!- (s', v, \alpha\gamma)$, falls $(s', \alpha) \in d(s, -, c)$

- Schreibweise:

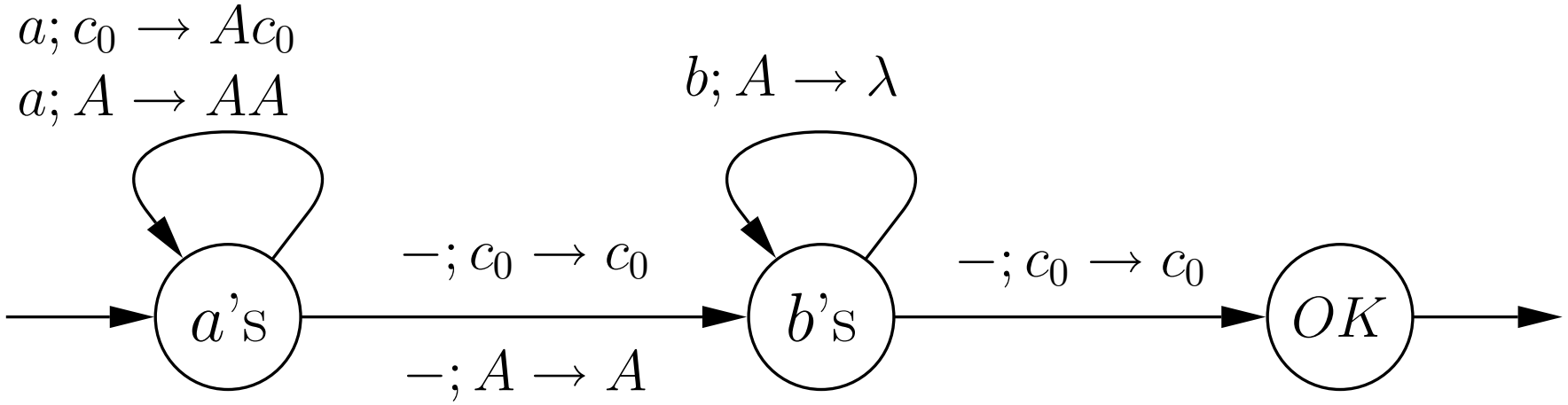
$$con = con_0 \vdash\!\!\!- con_1 \vdash\!\!\!- \cdots \vdash\!\!\!- con_n = con'$$

kann durch

$con \vdash\!\!\!-^{n} con'$ oder $con \vdash\!\!\!-^{*} con'$

abgekürzt werden.

Beispiel



Konfigurationsfolge:

$$(a's, abb, Ac_0) \vdash\!\!\!- (a's, bb, AAc_0) \vdash\!\!\!- (b's, bb, AAc_0) \vdash\!\!\!- (b's, b, Ac_0)$$

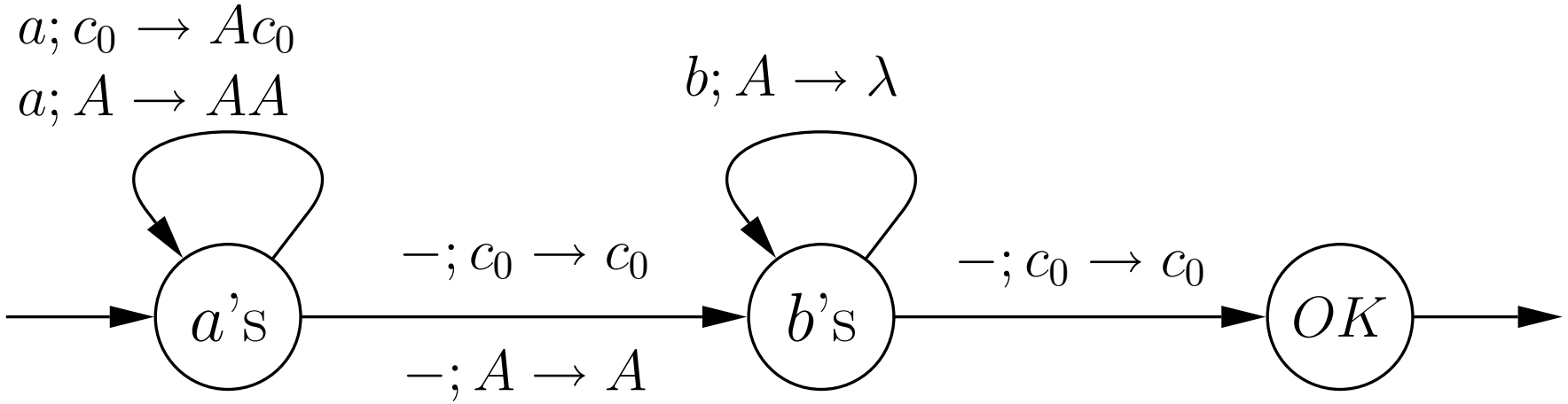
Erkannte Sprache

Gegeben: $K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0)$

Erkannte Sprache

- K erkennt $w \in I^*$, falls $(s_0, w, c_0) \vdash^* (s'', \lambda, \gamma)$ für $s'' \in F$.
- Die Menge aller von K erkannten Wörter bildet die erkannte Sprache $L(K)$.

Beispiel



Erkannte Sprache: $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Erkennen von a^2b^2:

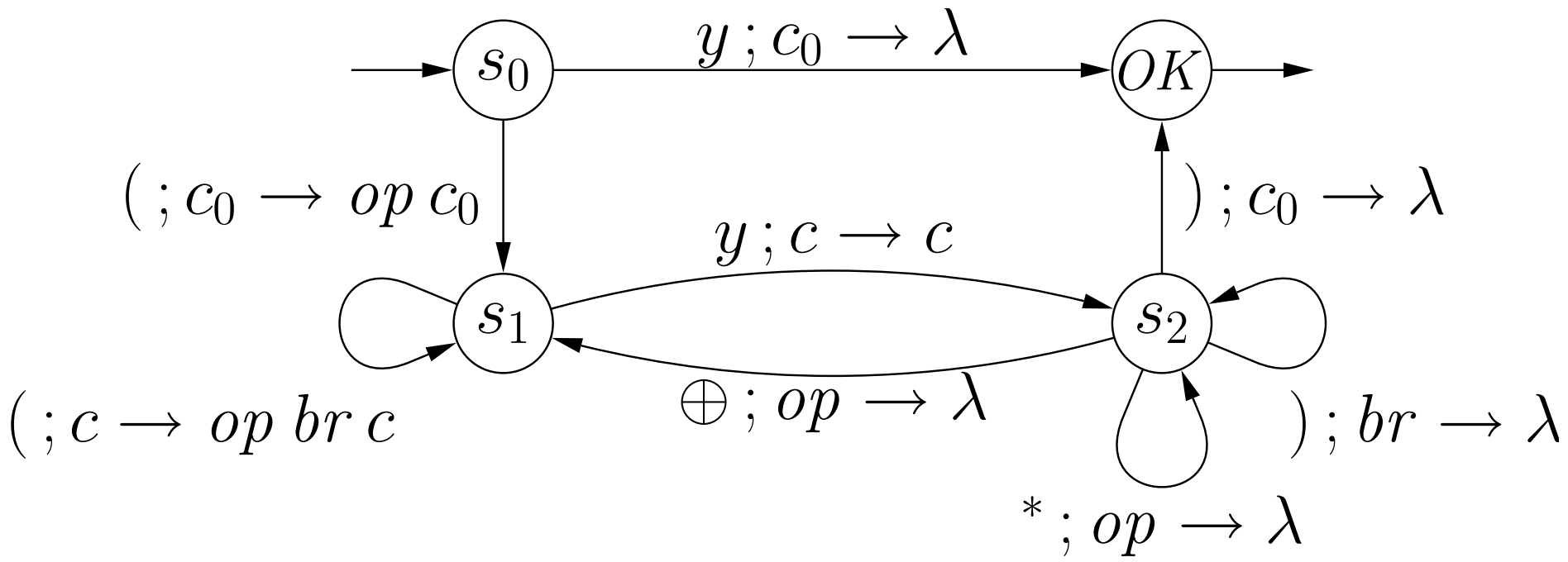
$$(a's, aabb, c_0) \vdash\!\!\!- (a's, abb, Ac_0) \vdash\!\!\!- (a's, bb, AAc_0) \vdash\!\!\!-$$
$$(b's, bb, AAc_0) \vdash\!\!\!- (b's, b, Ac_0) \vdash\!\!\!- (b's, \lambda, c_0) \vdash\!\!\!- (OK, \lambda, c_0)$$

Deterministischer Kellerautomat

$$K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0) \text{ mit}$$

- Z: endliche Menge von Zuständen
- I: endliches Eingabealphabet mit $- \notin I$
- C: endliche Menge von Kellersymbolen
- d: $Z \times (I \cup \{-\}) \times C \rightsquigarrow Z \times C^*$: Zustandsüberführung mit $|d(s, x, c)| + |d(s, -, c)| \leq 1$ für alle $s \in Z$, $x \in I$, $c \in C$,
- $s_0 \in Z$: Startzustand
- $F \subseteq Z$: Endzustände
- $c_0 \in C$: initiales Kellersymbol

Beispiel: Reguläre Ausdrücke



mit $y \in I \cup \{empty, lambda\}$, $c \in \{op, br, c_0\}$ und $\oplus \in \{+, \circ\}$

$$
\begin{array}{lrrr}
 & (s_0, & (((x + empty)^*) \circ lambda), & c_0) \\
\vdash & (s_1, & ((x + empty)^*) \circ lambda), & op\, c_0) \\
\vdash & (s_1, & (x + empty)^*) \circ lambda), & op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_1, & x + empty)^*) \circ lambda), & op\, br\, op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, & + empty)^*) \circ lambda), & op\, br\, op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_1, & empty)^*) \circ lambda), & br\, op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, &)^*) \circ lambda), & br\, op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, & ^*) \circ lambda), & op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, &) \circ lambda), & br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, & \circ lambda), & op\, c_0) \\
\vdash & (s_1, & lambda), & c_0) \\
\vdash & (s_2, &), & c_0) \\
\vdash & (OK, & \lambda, &)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& (s_0, && ((x + empty)^*) \circ lambda), && c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (s_1, && (x + empty)^*) \circ lambda), && op\, c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (s_1, && x + empty)^*) \circ lambda), && op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (s_2, && + empty)^*) \circ lambda), && op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (s_1, && empty)^*) \circ lambda), && br\, op\, c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (s_2, &&)^*) \circ lambda), && br\, op\, c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (s_2, && ^*) \circ lambda), && op\, c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (s_2, &&) \circ lambda), && c_0) \\
\vdash\!\!- \quad & (OK, && \circ lambda), &&)
\end{aligned}
$$

Mächtigkeit

- $\mathcal{L}_{DKA}$: Klasse aller von deterministischen Kellerautomaten erkannten Sprachen
- $\mathcal{L}_{NKA}$: Klasse aller von nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannten Sprachen

Es gibt keinen deterministischen Kellerautomaten, der

$$\{wtrans(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

erkennt.

Also gilt

$$\mathcal{L}_{DKA} \subset \mathcal{L}_{NKA}$$

Übersetzung kontextfreier Grammatiken in Kellerautomaten

Gegeben: kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $c_0, c_{OK} \notin N \cup T$.

$PDA(G) =$
$(\{s_0, OK\}, T, N \cup T \cup \{c_0, c_{OK}\}, d_G, s_0, \{OK\}, c_0)$ mit

- $d_G(s_0, -, c_0) = \{(s_0, S\, c_{OK})\}$,
- $d_G(s_0, -, A) = \{(s_0, u) \mid A ::= u \in P\}$,
- $d_G(s_0, x, x) = \{(s_0, \lambda)\}$ für alle $x \in T$ und
- $d_G(s_0, -, c_{OK}) = \{(OK, \lambda)\}$.

Beispiel: Klammergebirge

$$G = (\{A\}, \{\,[\,,\,]\,\}, \{A ::= AA \mid [A] \mid \lambda\}, A)$$

$L(G)$: alle korrekten Klammerungen über dem Klammerpaar [und] .