Berechenbarkeit

- Endliche Automaten und Kellerautomaten erkennen nicht alle algorithmisch beschreibbaren Sprachen.
- Mächtigeres Berechnungsmodell: z.B. PASCALchen
  - Syntax: *while*-Programm
  - Semantik: partielle Funktion auf den natürlichen Zahlen
- Berechenbare Funktion: Eine Funktion heißt berechenbar, falls sie Semantikfunktion eines *while*-Programms ist.

Ein *while*-Programm

$$\left.\begin{array}{l} \mathit{begin} \\ \quad X4 := 0;\ X1 := X2; \\ \quad \mathit{while}\ X4 \neq X3\ \mathit{do}\ \mathit{begin} \\ \qquad X4 := \mathit{succ}(X4); \\ \qquad X1 := \mathit{succ}(X1) \\ \quad \mathit{end} \\ \mathit{end} \end{array}\right\}\ X1 := X2 + X3$$

Semantikfunktion für *while*-Programme

Sei P ein k-variables *while*-Programm und $j \in \mathbb{N}$. Dann ist die j-stellige Semantikfunktion von P

$$SEM_P \colon \mathbb{N}^j \to \mathbb{N}$$

für die Argumente $(x_1, \ldots, x_j) \in \mathbb{N}^j$ nach folgenden Regeln definiert:

(1) Aus den Argumenten $(x_1, \dots, x_j)$ wird eine Eingabe $a \in \mathbb{N}^k$ hergestellt:

$$(x_1, \dots, x_j) \rightsquigarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_k) \text{ falls } j \geq k \\ (x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0) \text{ falls } j < k \end{cases}$$

(2) P wird mit Eingabe a berechnet.

(3) Terminiert die Berechnung mit der Ausgabe $(y_1, \dots, y_k)$, so ist $SEM_P(x_1, \dots, x_j) = y_1$.

(4) Terminiert sie nicht, ist $SEM_P(x_1, \dots, x_j)$ undefiniert.

Berechenbare Funktion

Eine partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^j \longrightarrow \mathbb{N}$ heißt berechenbar, wenn ein *while*-Programm existiert mit

$$f = SEM_P^{(j)}.$$

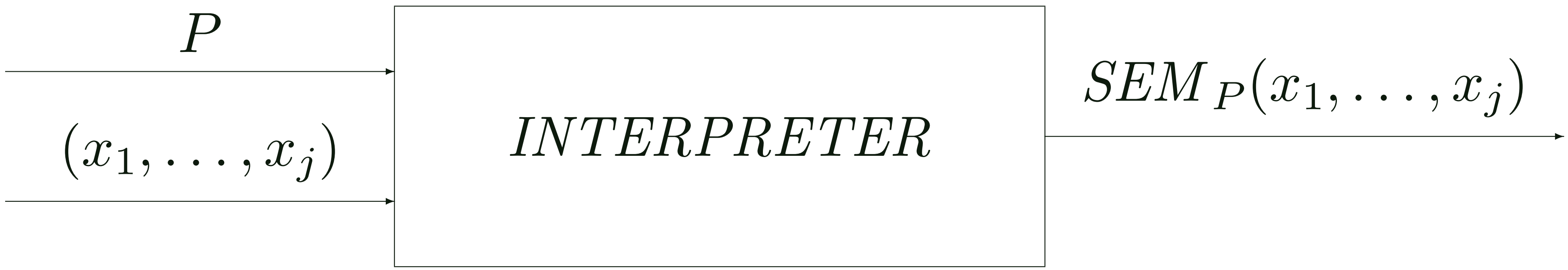
Churchsche These

Die Menge der (durch *while*-Programme) berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der partiellen Funktionen $f\colon \mathbb{N}^j \longrightarrow \mathbb{N}$, die im intuitiven Sinne berechenbar sind.

Programme als Eingaben für Programme

- Verhalten eines Programms hängt vom eingegebenen Programm ab.

Beispiel: Interpreter für PASCALchen



Repräsentation von *while*-Programmen als natürliche Zahlen (Gödelnumerierung)

1. Umwandlung der Zeichen, aus denen *while*-Progamme bestehen, in Bitmuster
   - Der Zeichensatz A von PASCALchen besteht aus aus 22 Zeichen.
   - Sei $code\colon A \longrightarrow \{0,1\}^*$ eine injektive Abbildung mit $code(a) = 1b_1 \cdots b_5$

> $code(a)$ liefert eine eindeutige 6-Bit-Darstellung von a, die mit 1 beginnt.

2. Repräsentation von *while*-Progammen als Bitmuster

$code^*: A^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ mit

(i) $code^*(\lambda) = \lambda$ und

(ii) $code^*(av) = code(a)code^*(v)$ für $a \in A$, $v \in A^*$.

> Für jedes *while*-Programm P liefert $code^*(P)$ ein Bitmuster.

3. Umwandlung von *while*-Progammen in natürliche Zahlen

Jedes Bitmuster lässt sich eindeutig als Binärdarstellung einer natürlichen Zahl auffassen.

Injektivität der Gödelnummerierung

Lemma

Die Abbildung $code^*$ ist injektiv.

Index eines *while*-Programms

Der Index eines *while*-Programms P ist die natürliche Zahl, deren Binärdarstellung $code^*(P)$ ist.

Bestimmung des Programms eines Indexes

1. Umwandlung von natürlichen Zahlen in Bitmuster
   Jede natürliche Zahl n läßt sich eindeutig in ein Bitmuster $B(n)$ umwandeln.
2. Umwandlung von Bitmustern in *while*-Programme
   Für alle $B \in \{0,1\}^*$ sei $decode\colon \{0,1\}^* \to A^*$ definiert durch $decode(B) = \lambda$ für alle B kürzer als 6 und

$$decode(b_1 \cdots b_6 B) = \begin{cases} a\, decode(B) \text{ wenn} \\ \quad code(a) = b_1 \cdots b_6 \\ \lambda \text{ sonst.} \end{cases}$$

3. Aufzählen von *while*-Programmen

- Falls $decode(B(n))$ ein *while*-Programm ist:

$$AUFZÄHLUNG(n) = decode(B(n))$$

- Falls $decode(B(n))$ kein *while*-Programm ist:

$$\begin{aligned} AUFZÄHLUNG(n) = \;& begin \\ & \quad X1 := 0;\; X2 := 1; \\ & \quad while\ X1 \neq X2\ do\ X1 := X1 \\ & end \end{aligned}$$

Lemma
Durch $AUFZÄHLUNG$ wird der Index eines Programms P auf P abgebildet.

Schreibweisen:

- $P_n = AUFZÄHLUNG(n)$: *while*-Programm mit Index n
- $SEM_i = SEM_{P_i}^{(1)}$

Folgerung: Berechenbare Funktionen und *while*-Programme sind aufzählbar

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
P_0 & P_1 & P_2 & \ldots & P_n & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
SEM_0 & SEM_1 & SEM_2 & \ldots & SEM_n & \ldots
\end{array}
$$

Effektive Aufzählbarkeit

- Eine Menge M heißt aufzählbar (abzählbar), wenn es eine surjektive Abbildung $num\colon \mathbb{N} \to M$ gibt.
- M heißt effektiv aufzählbar (rekursiv aufzählbar), wenn diese Numerierung durch einen Algorithmus vorgenommen wird.

Effektivität von *AUFZÄHLUNG*

1. $B(n)$: algorithmisch bestimmbar
2. $decode(B(n))$; algorithmisch bestimmbar
3. Ist $decode(B(n))$ ein *while*-Programm?: algorithmisch entscheidbar

Existenz nicht-berechenbarer Funktionen

Satz

Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die nicht berechenbar ist.

Das Halteproblem

- Eingabe: Ein *while*-Programm P und eine Eingabe a für P
- Ausgabe: $\begin{array}{ll} \mathit{True}, & \text{falls } P \text{ mit der Eingabe } a \text{ hält} \\ \mathit{False}, & \text{falls } P \text{ mit der Eingabe } a \text{ nicht hält} \end{array}$

Unlösbarkeit des Halteproblems

- Das Problem, ob ein Programm hält, wenn es auf den eigenen Index angewendet wird, ist nicht lösbar, d.h.:

Die Funktion $\mathit{HALTEPROBLEM} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die definiert ist für alle $i \in \mathbb{N}$ durch

$$\mathit{HALTEPROBLEM}(i) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mathit{SEM}_i(i) \text{ definiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht berechenbar.

Unlösbarkeit des allgemeinen Halteproblems

- Das Problem, ob ein Programm auf eine beliebige Eingabe hält, ist nicht lösbar, d.h.:

Die Funktion $HALTEPROBLEM2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$HALTEPROBLEM2(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } SEM_i(j) \\ & \text{definiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht berechenbar.