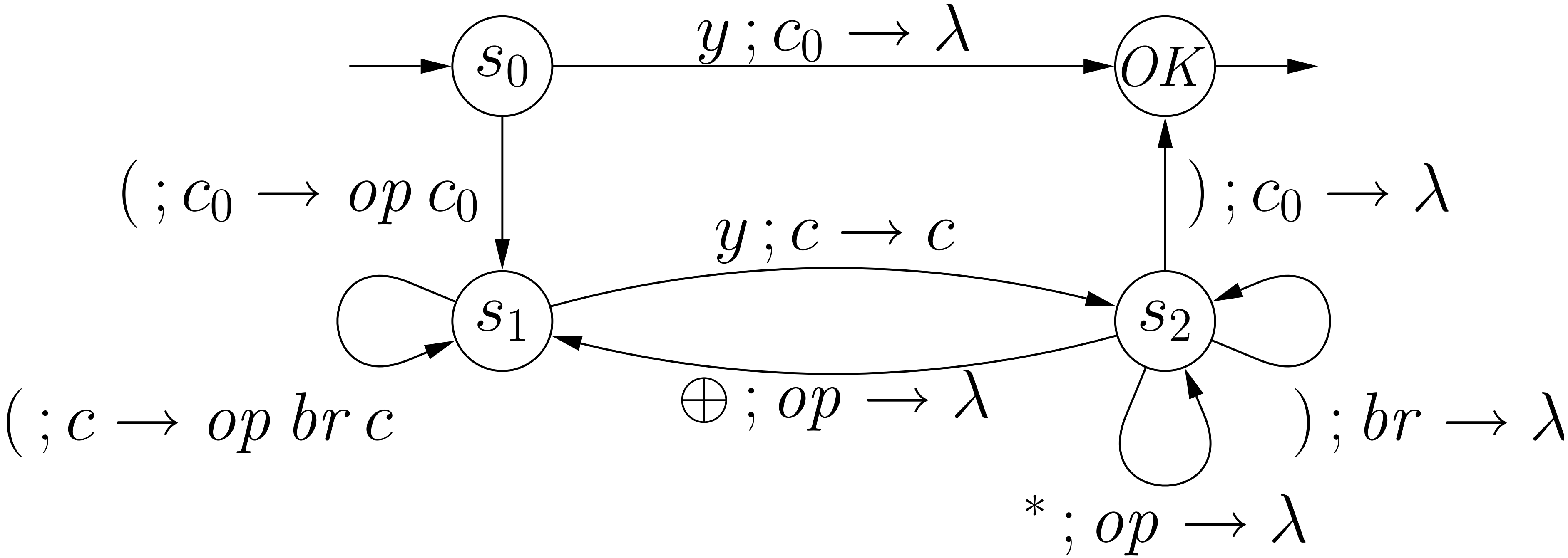
Ein deterministischer Kellerautomat ist ein System $K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0)$ mit

- Z: endliche Menge von Zuständen
- I: endliches Eingabealphabet mit $- \notin I$
- C: endliche Menge von Kellersymbolen
- $d: Z \times (I \cup \{-\}) \times C \leadsto Z \times C^*$: Zustandsüberführung mit $|d(s, x, c)| + |d(s, -, c)| \leq 1$ für alle $s \in Z$, $x \in I$, $c \in C$,
- $s_0 \in Z$: Startzustand
- $F \subseteq Z$: Endzustände
- $c_0 \in C$: initiales Kellersymbol

Beispiel: Reguläre Ausdrücke



mit $y \in I \cup \{empty, lambda\}$, $c \in \{op, br, c_0\}$ und $\bigoplus \in \{+, \circ\}$

Erkennen von $((x^*) + empty)$

$$
\begin{array}{rlrr}
 & (s_0, & ((x^*) + empty), & c_0) \\
\vdash & (s_1, & (x^*) + empty), & op\, c_0) \\
\vdash & (s_1, & x^*) + empty), & op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, & ^*) + empty), & op\, br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, &) + empty), & br\, op\, c_0) \\
\vdash & (s_2, & +empty), & op\, c_0) \\
\vdash & (s_1, & empty), & c_0) \\
\vdash & (s_2, &), & c_0) \\
\vdash & (OK, & \lambda, & \lambda)
\end{array}
$$

Mächtigkeit

- $\mathcal{L}_{DKA}$: Klasse aller von deterministischen Kellerautomaten erkannten Sprachen
- $\mathcal{L}_{NKA}$: Klasse aller von nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannten Sprachen

Es gibt keinen deterministischen Kellerautomaten, der

$$\{w trans(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

erkennt.

Also gilt

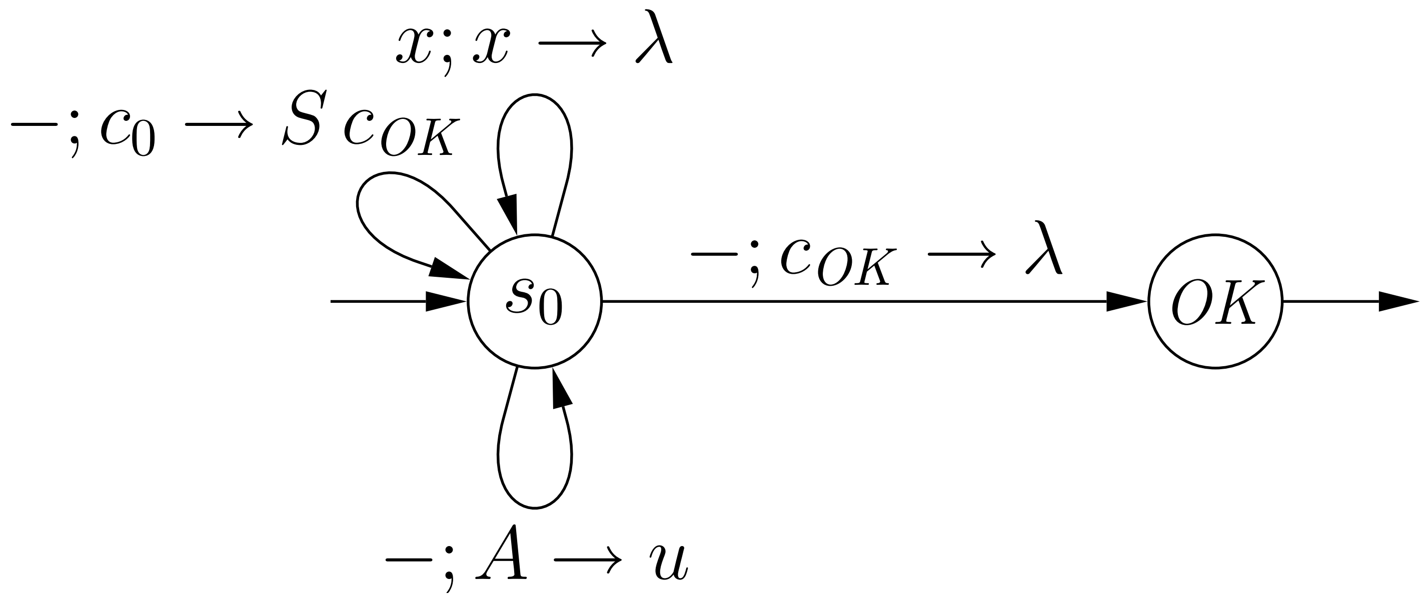
$$\mathcal{L}_{DKA} \subset \mathcal{L}_{NKA}$$

Fragestellungen

- Sind kontextfreie Sprachen kompositional? (Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern.)
- Ist für kontextfreie Sprachen das Wortproblem schnell lösbar? (Die von determinitischen Kellerautomaten erkannten Sprachen lassen sich in linearer Zeit erkennen.)
- Wie hängen Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen zusammen?
- Was können Kellerautomaten nicht?

Übersetzung kontextfreier Grammatiken in Kellerautomaten

Gegeben: kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $c_0, c_{OK} \notin N \cup T$.

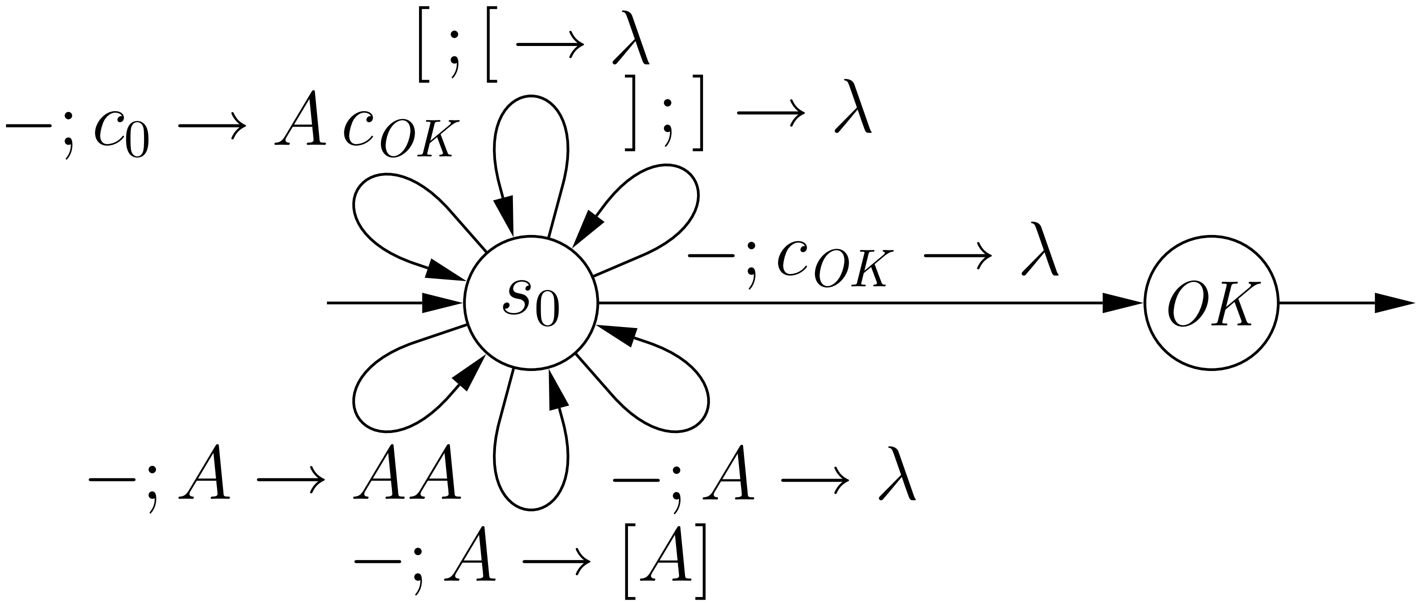


wobei $x \in T$ und $A ::= u \in P$

Beispiel: Klammergebirge

$$G = (\{A\}, \{[\,,\,]\}, \{A ::= AA \mid [A] \mid \lambda\}, A)$$

$L(G)$: alle korrekten Klammerungen über dem Klammerpaar [und] .

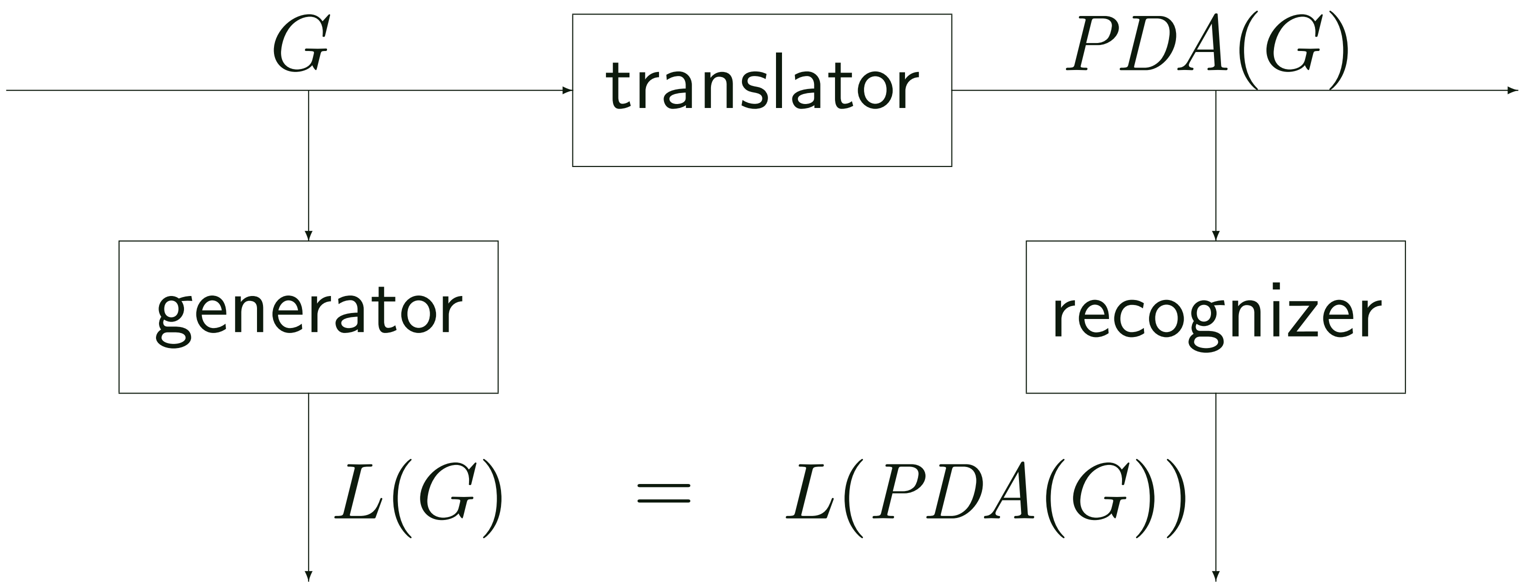


Erzeugen und Erkennen von $[]$

- $A \underset{A::=[A]}{\longrightarrow} [A] \underset{A::=\lambda}{\longrightarrow} []$

-
$$(s_0, [], c_0) \longmapsto (s_0, [], Ac_{OK}) \longmapsto (s_0, [], [A]c_{OK}) \longmapsto$$
$$(s_0,], A]c_{OK}) \longmapsto (s_0,],]c_{OK}) \longmapsto (s_0, \lambda, c_{OK}) \longmapsto (OK, \lambda, \lambda)$$

Korrektheit der Übersetzung



Linksableitungen

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Eine Linksableitung ist eine Ableitung $u_1 \xrightarrow[P]{} u_2 \xrightarrow[P]{} \cdots \xrightarrow[P]{} u_n$, bei der in jedem Schritt $u_i \xrightarrow[A_i ::= v_i]{} u_{i+1}$ $(1 \leq i < n)$ das am weitesten links stehende Nichtterminal ersetzt wird, d.h. $u_i = x_i A_i y_i$ und $u_{i+1} = x_i v_i y_i$ mit $x_i \in T^*$.

Schreibweise: $\overset{}{-\!\ell\!\!\longrightarrow}$

Beispiel

$G = (\{E\}, \{+, *, (,), id\}, P, E)$ mit den Regeln

$$E ::= E + E | E * E | (E) | id$$

Es gibt zwei verschiedene Linksableitungen für $id + id * id$:

1. $E \longrightarrow E{+}E \longrightarrow id{+}E \longrightarrow id{+}E{*}E$
   $\longrightarrow id + id{*}E \longrightarrow id + id * id$

2. $E \longrightarrow E{*}E \longrightarrow E{+}E{*}E \longrightarrow id{+}E{*}E$
   $\longrightarrow id + id{*}E \longrightarrow id + id * id$

Lemma

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann lässt sich jede Ableitung $A \xrightarrow[P]{*} v$ mit $A \in N$, $v \in T^*$ in eine Linksableitung $A \xrightarrow[P]{*}_{\ell} v$ umformen.

Zusammenhang zwischen Kellerautomaten und kontextfreien Sprachen

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es einen Kellerautomaten K, so dass $L(G) = L(K)$.

Für jeden Kellerautomaten K gibt es eine kontextfreie Grammatik G, so dass $L(K) = L(G)$. (Ohne Beweis)

Folgerung

$$\boxed{\mathcal{L}_{NKA} = \mathcal{L}_{KFS}.}$$

- $\mathcal{L}_{NKA}$: Klasse aller von nichtdeterministischen Kellerautomaten erkannten Sprachen
- $\mathcal{L}_{KFS}$: Klasse der kontextfreien Sprachen

Fragestellungen

- Sind kontextfreie Sprachen kompositional? (Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern.)
- Ist für kontextfreie Sprachen das Wortproblem schnell lösbar?(Die von determinitischen Kellerautomaten erkannten Sprachen lassen sich in linearer Zeit erkennen.)
- Wie hängen Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen zusammen? (Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.)
- Was können Kellerautomaten nicht?

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Zu jeder kontextfreien Sprache L existiert ein $p \in \mathbb{N}$, so dass gilt:
Ist $z \in L$ mit $length(z) \geq p$ dann lässt sich z schreiben als $z = uvwxy$, wobei

- $length(vwx) \leq p$,
- $vx \neq \lambda$ und
- $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.