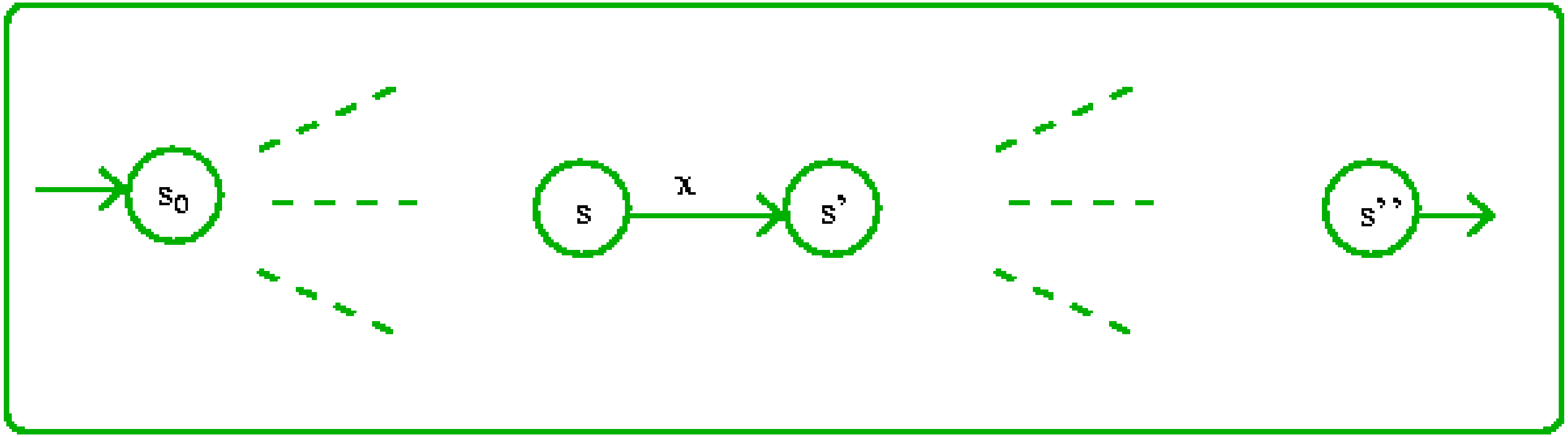
Endlicher Automat

Ein endlicher Automat ist ein System $A = (Z, I, d, s_0, F)$ mit

- Z: endliche Menge von Zuständen,
- I: endliches Eingabealphabet,
- $d \subseteq Z \times I \times Z$: Zustandsüberführung,
- $s_0 \in Z$: Startzustand,
- $F \subseteq Z$: Endzustände.

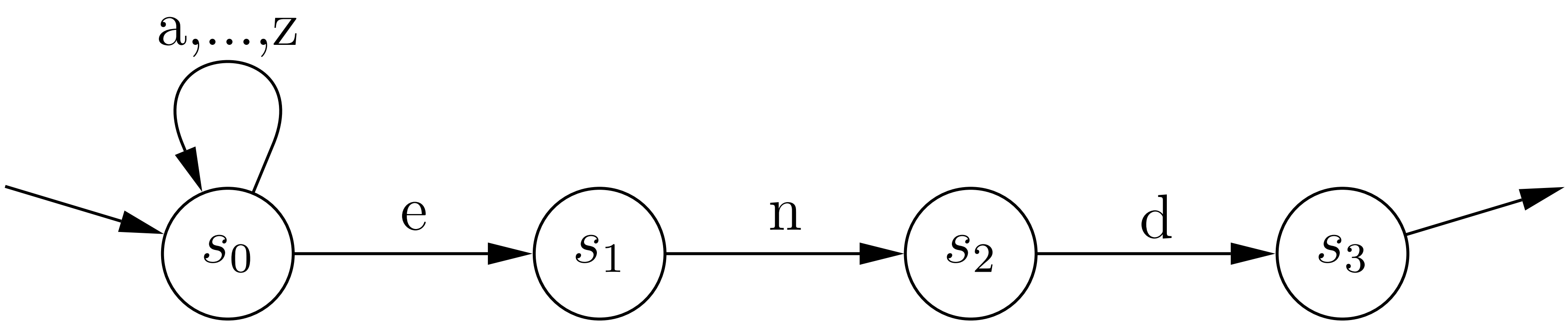
Graphische Darstellung

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$

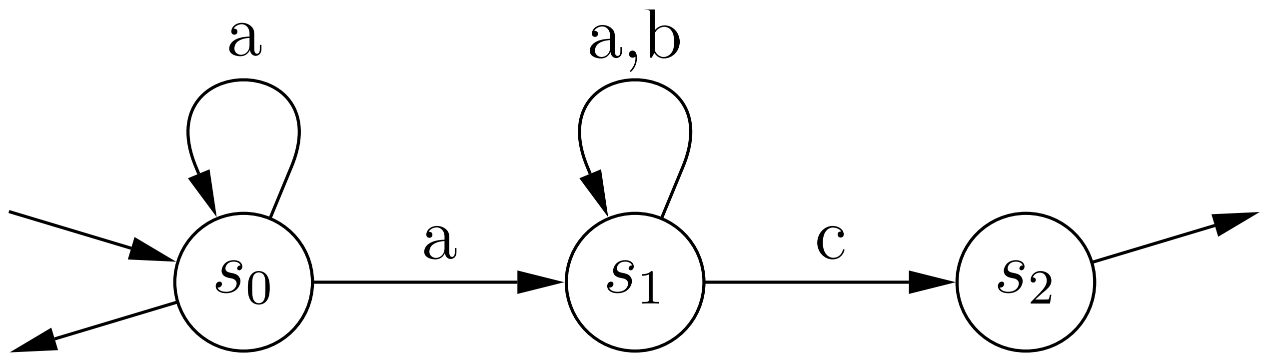


$$s' \in d(s, x), \quad s'' \in F$$

Beispiel 1



Beispiel 2



Akzeptiert u.a. das Wort $aabc$:

- $(s_0, aabc) \vdash (s_0, abc) \vdash (s_1, bc) \vdash (s_1, c) \vdash (s_2, \lambda)$
- $(s_0, aabc) \vdash (s_1, abc) \vdash (s_1, bc) \vdash (s_1, c) \vdash (s_2, \lambda)$

Fortgesetzte Zustandsüberführung

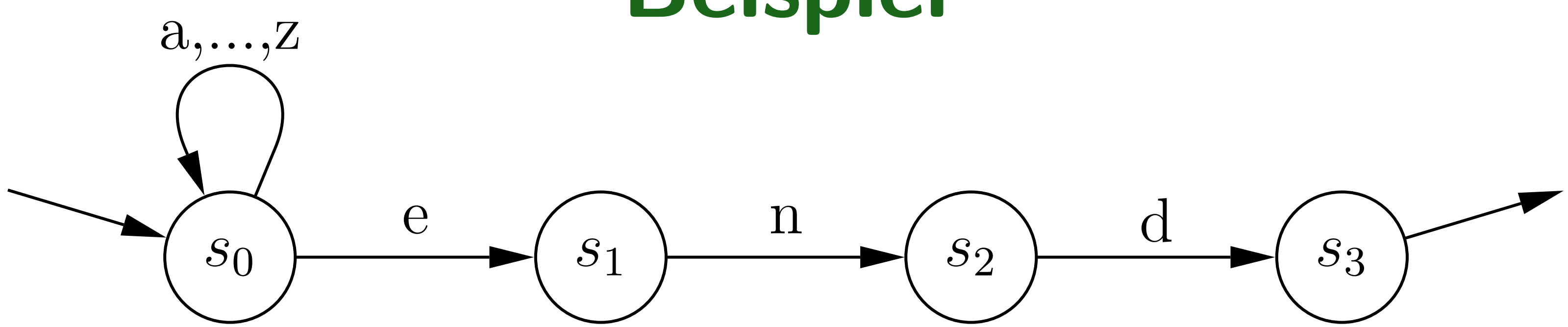
Die fortgesetzte Zustandsüberführung verarbeitet Wörter statt Zeichen.

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$

Für alle $s, s', s'' \in Z$, $x \in I$, $w \in I^*$:

- $d^*(s, \lambda) = \{s\}$,
- $d^*(s, wx) = \bigcup_{s' \in d^*(s,w)} d(s', x)$.

Beispiel



$$\begin{aligned} d^*(s_0, end) &= \bigcup_{s' \in d^*(s_0, en)} d(s', d) =_{1.} \bigcup_{s' \in \{s_0, s_2\}} d(s', d) \\ &= d(s_0, d) \cup d(s_2, d) = \{s_0\} \cup \{s_3\} = \{s_0, s_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad d^*(s_0, en) &= \bigcup_{s' \in d^*(s_0, e)} d(s', n) =_{2.} \bigcup_{s' \in \{s_0, s_1\}} d(s', n) \\ &= d(s_0, n) \cup d(s_1, n) = \{s_0\} \cup \{s_2\} = \{s_0, s_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad d^*(s_0, e) &= \bigcup_{s' \in d^*(s_0, \lambda)} d(s', e) = \bigcup_{s' \in \{s_0\}} d(s', e) \\ &= d(s_0, e) = \{s_0, s_1\} \end{aligned}$$

Erkannte Sprache

Die erkannte Sprache besteht aus allen Wörtern, die der Automat ausgehend vom Startzustand lesen kann, so dass nach dem Lesen ein Endzustand erreicht wird.

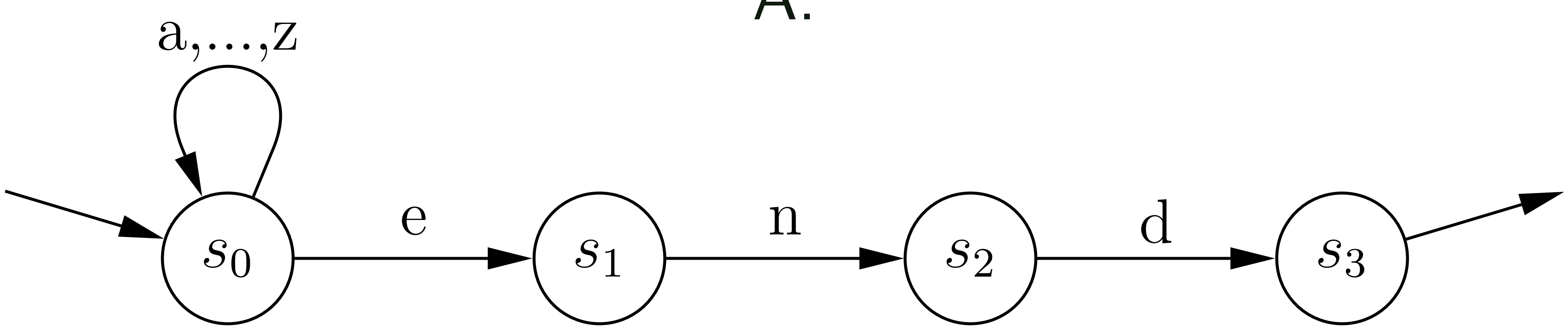
Erkannte Sprache

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$

$$L(A) = \{w \in I^* \mid d^*(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Beispiele

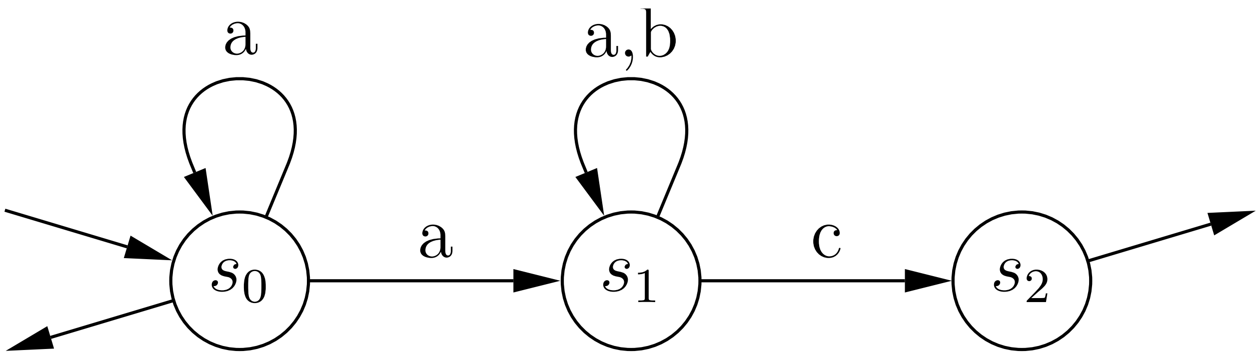
A:



$$L(A) = \{wend \mid w \in \{a, \ldots, z\}^*\}$$

Beispiele

A:



$$L(A) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n wc \mid n \geq 1, w \in \{a,b\}^*\} = \{a\}^* \cup (\{a\}\{a\}^*\{a,b\}^*\{c\})$$

Teilwortsuche mit endlichen Automaten

- Eingabe: $u, v \in A^*$
- Ausgabe: Alle Stellen in v, an denen u vorkommt.

Idee: Konstruiere einen endlichen Automaten, der alle Anfangswörter (Präfixe) von v erkennt, die auf u enden.

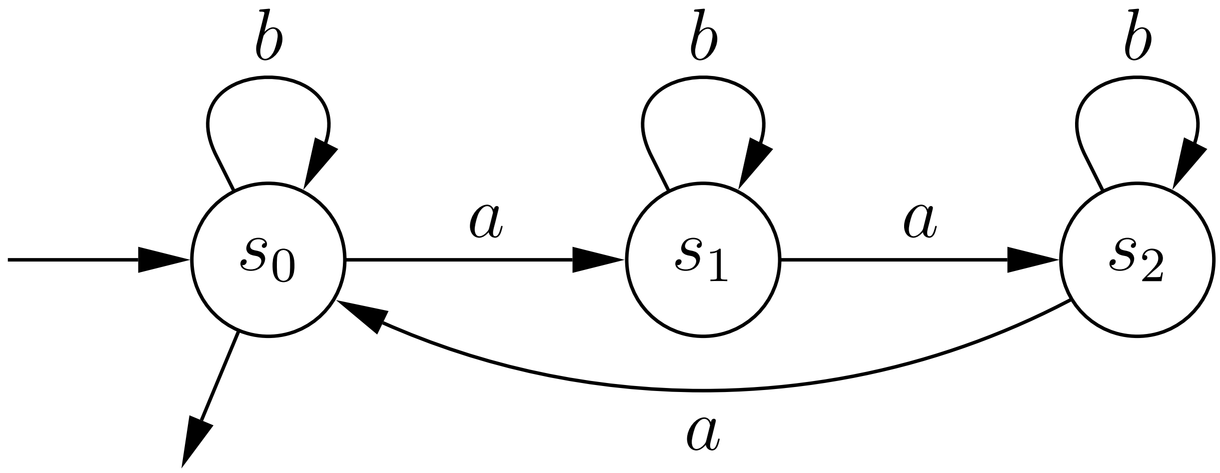
Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) ist ein System $A = (Z, I, d, s_0, F)$ mit

- Z: endliche Menge von Zuständen,
- I: endliches Eingabealphabet,
- $d\colon Z \times I \to Z$: Abbildung
- $s_0 \in Z$: Startzustand,
- $F \subseteq Z$: Endzustände.

Beispiel



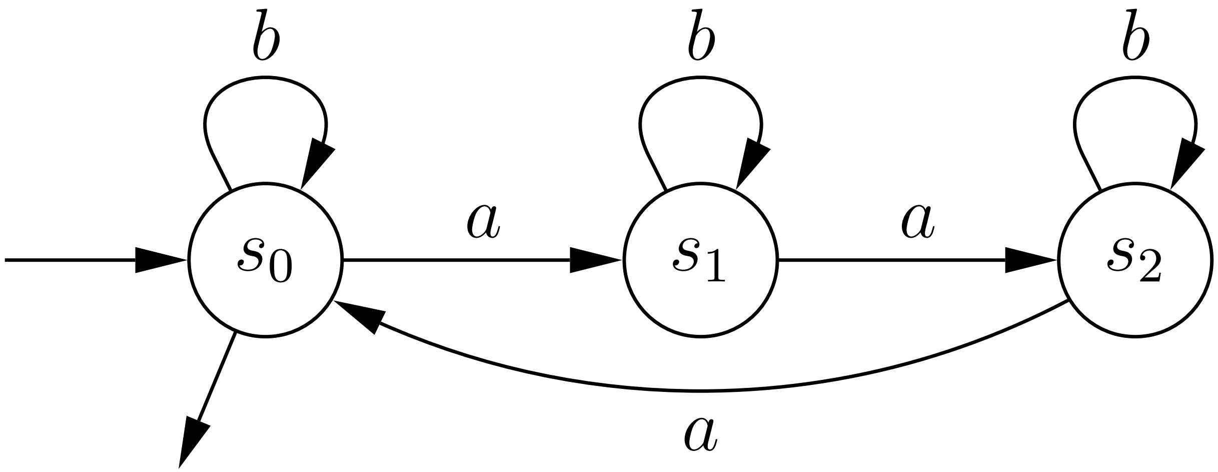
Fortgesetzte Zustandsüberführung

$A = (Z, I, d, s_0, F)$: DEA

Für alle $s, s', s'' \in Z$, $x \in I$, $w \in I^*$:

- $d^*(s, \lambda) = s$;
- $d^*(s, wx) = d(d^*(s, w), x)$.

Beispiel



$$
\begin{aligned}
d^*(s_1, aab) = \;& d(d^*(s_1, aa), b) = d(d(d^*(s_1, a), a), b) = \\
& d(d(d(d^*(s_1, \lambda), a), a), b) = \\
& d(d(d(s_1, a), a), b) = \\
& d(d(s_2, a), b) = d(s_0, b) = s_0
\end{aligned}
$$

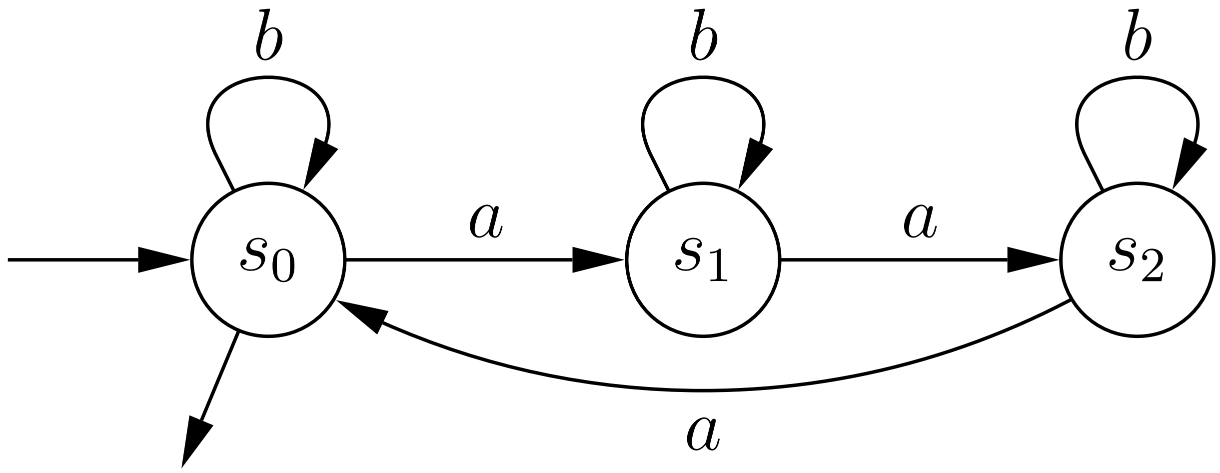
Erkannte Sprache

Erkannte Sprache

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$

$$L(A) = \{w \in I^* \mid d^*(s_0, w) \in F\}$$

Beispiel



Erkannte Sprache:

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid count(a,w) \bmod 3 = 0\}$$

Verarbeitung von Wörtern in iterativer Darstellung

Sei

- $A = (Z, I, d, s_0, F)$
- $w = a_1 \cdots a_n$ mit $a_i \in I$ für $i = 1, \ldots, n$
  ($n = 0$ impl. $w = \lambda$)
- $s, s' \in Z$

Dann

$$\boxed{s' \in d^*(s, w) \iff \begin{array}{l} \text{Es ex. } t_0, \ldots, t_n \in Z, \text{ so dass} \\ t_i \in d(t_{i-1}, a_i) \ (i = 1, \ldots, n). \end{array}}$$

Verarbeitung im Zustandsgraph

Wortproblem

Gegeben: eine Sprache $L \subseteq I^*$
(z.B. als endlicher Automat).

Eingabe: Ein Wort $w \in I^*$.

Ausgabe: Ja, falls $w \in L$
Nein, sonst.

Satz (schnelle Worterkennung)
Für von endlichen Automaten erkannte Sprachen ist das Wortproblem in linearer Zeit lösbar.