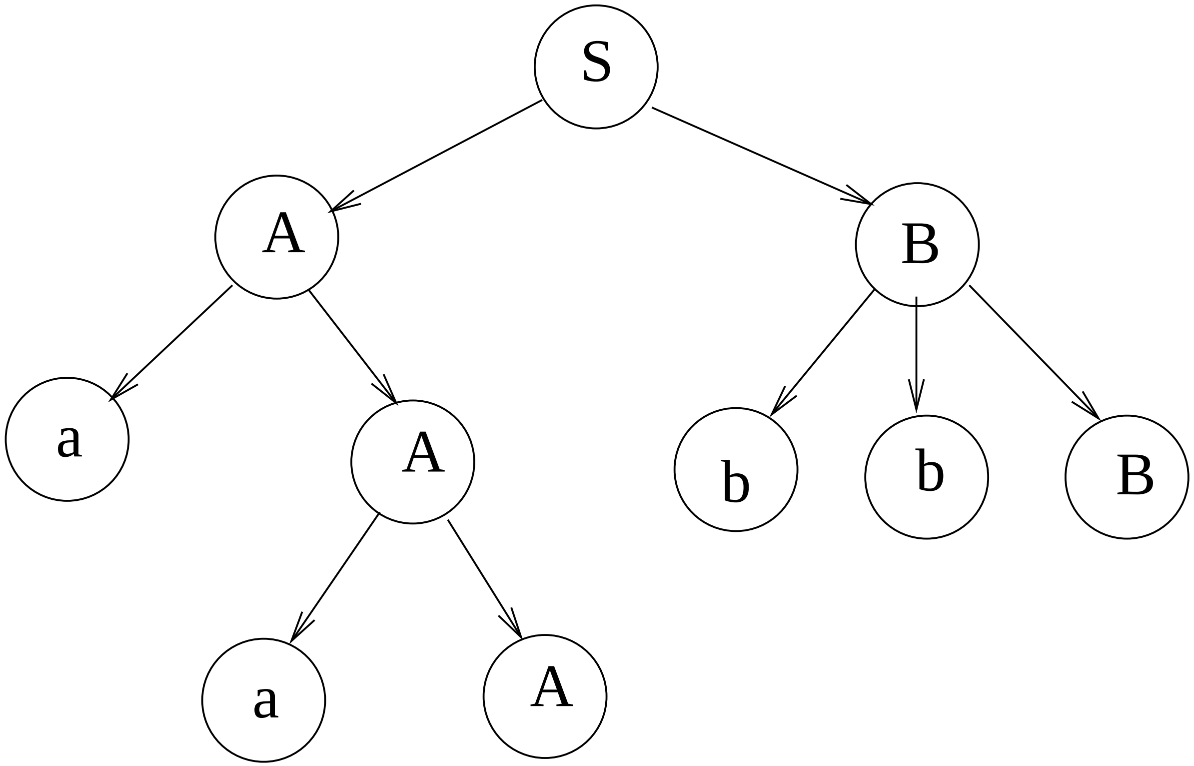
Ableitungsbäume

- Veranschaulichen Ableitungen kontextfreier Grammatiken
- Nützlich für den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen
- Konstuktion beruht auf dem Kontextfreiheitslemma
- Ermöglichen die Nutzung bekannter Baumeigenschaften für die Analyse von Ableitungen
- Spielen eine wichtige Rolle im Compilerbau

Baumdarstellung von Ableitungen

- $S \underset{S::=AB}{\longrightarrow} AB \underset{A::=aA}{\longrightarrow} aAB \underset{A::=aA}{\longrightarrow} a^2AB \underset{B::=bbB}{\longrightarrow} a^2AbbB$



Definition

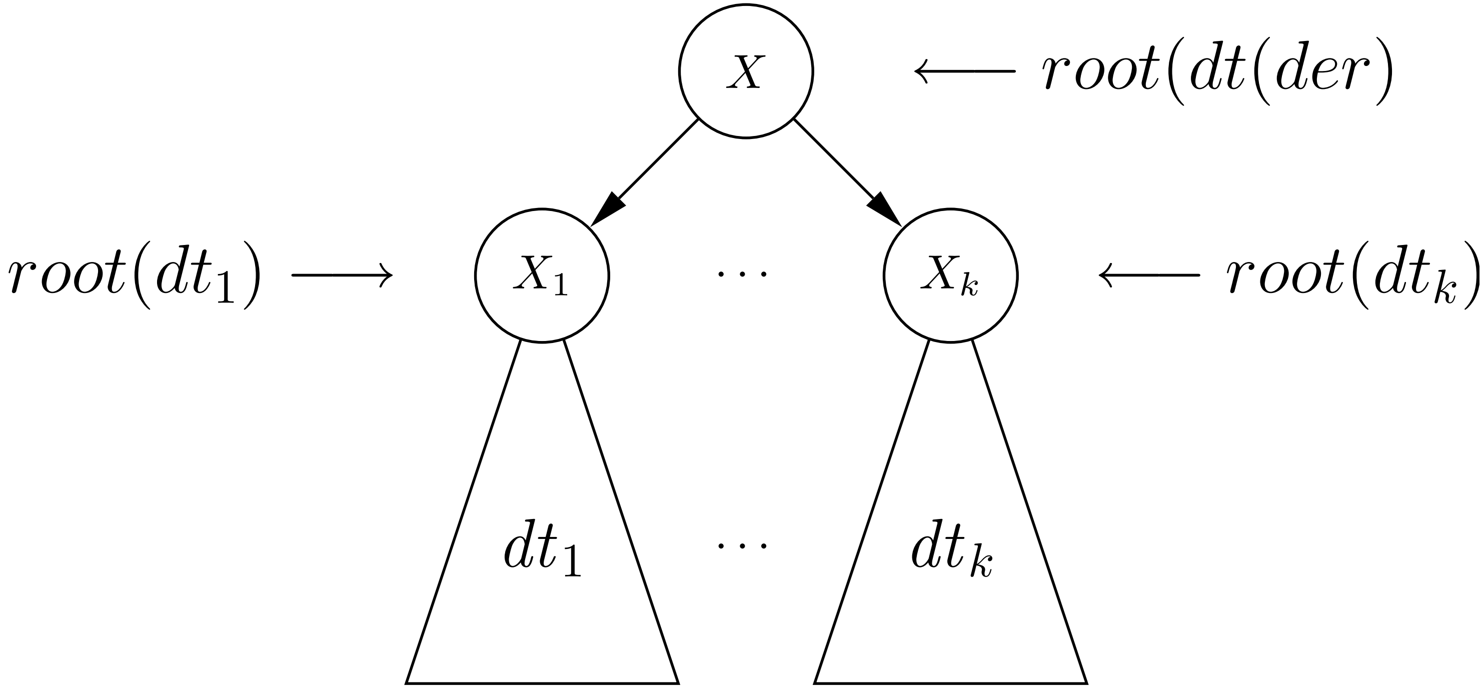
- Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ-Produktionen.
- Sei $X \xrightarrow[P]{n} w$ mit $X \in N \cup T$.

Dann ist der Ableitungsbaum $dt(X \xrightarrow[P]{*} w)$ rekursiv wie folgt definiert:

1. $dt(X \xrightarrow[P]{0} X)$: X $\longleftarrow$ $root(dt(X \xrightarrow[P]{0} X))$

   - $height(dt(X \xrightarrow[P]{0} X)) = 0$ und $res(dt(X \xrightarrow[P]{0} X)) = X$

2. Sei $der : X \xrightarrow[P]{} X_1 \ldots X_k \xrightarrow{n} w$. Seien $X_i \xrightarrow[P]{n_i} w_i$ $(n_i \leq n)$ die korrespondierenden Ableitungen gemäß dem Kontextfreiheitslemma. Sei $dt_i = dt(X_i \xrightarrow[P]{n_i} w_i)$. Dann hat der Ableitungsbaum $dt(der)$ die Form



- $height(dt(der)) = 1 + \max\{height(dt_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$
- $res(dt(der)) = res(dt_1) \cdots res(dt_k)$.

Beziehung zwischen Baumhöhe und Resultatslänge

Beobachtung 1
Sei b die Länge der längsten rechten Seite von Produktionen aus P. Dann gilt für alle Ableitungsbäume dt:

$$length(res(dt)) \leq b^{height(dt)}.$$

Ein langer Weg von der Wurzel zu einem Blatt

Beobachtung 2

In jedem Ableitungsbaum gibt es mindestens einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt, der so lang ist, wie der Baum hoch ist.