Syntax und Semantik

- Was verrät Syntax über Semantik? (Z.B. Wortproblem für von endlichen Automaten erkannte Sprachen ist lösbar.)
- Wie lässt sich syntaktisch semantischer Effekt festlegen? (Z.B. Produktautomat erkennt Schnitt.)

Modularisierung und Kompositionalität

- große DV-Systeme werden aus kleineren Komponenten aufgebaut, die selbst aus Unterkomponenten bestehen können usw.
  - welche Bausteine eignen sich?
  - wie können sie zusammengesetzt werden?
  - wie wirkt sich eine Komponente auf das Ganze aus?
- endliche Automaten als Bausteine haben exellente Kompositionalitätseigenschaften.
  - Vereinigung, Konkatenation, Kleene-Hülle, Schnitt, Komplement

Reguläre Sprachen

Sprachoperationen

Gegeben: I: Alphabet, $L, L_1, L_2 \subseteq I^*$

Vereinigung: $L_1 \cup L_2 = \{w \in I^* \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\}$

Konkatenation: $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

Kleene-Hülle: $L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ mit $L^0 = \{\lambda\}$ und $L^{i+1} = L^i L$

Reguläre Sprachen

Definition

Die Menge $\mathcal{L}_{REG(I)}$ der regulären Sprachen ist rekursiv wie folgt definiert:

- $\emptyset, \{\lambda\}, \{x\} \in \mathcal{L}_{REG(I)}$ für $x \in I$,
- $L, L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{REG(I)}$ impliziert $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$, $L^* \in \mathcal{L}_{REG(I)}$.

Beispiel

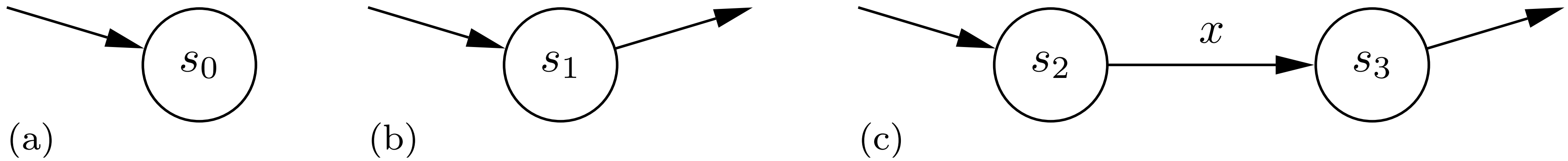
$$(\{\lambda\} \cup (\{a\}\{b\}\{b\}))^* = (\{\lambda\} \cup \{abb\})^* = \{(abb)^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Satz

Jede reguläre Sprache wird von einem endlichen Automaten erkannt.

Beweisskizze

Endliche Automaten für $\emptyset$, $\{\lambda\}$ und $\{x\}$:



Vereinigungsautomat

Gegeben: $A_1 = (Z_1, I, d_1, s_{0_1}, F_1),\ A_2 = (Z_2, I, d_2, s_{0_2}, F_2)$.
mit $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

$A_1 \cup A_2 = (Z_1 \cup Z_2 \cup \{s_0\}, I, d, s_0, F)$ mit

- $s_0 \notin Z_1 \cup Z_2$;
- $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s_0\}\}, & \text{falls } s_{0_i} \in F_i, i \in \{1,2\} \\ F_1 \cup F_2 \text{ sonst;} \end{cases}$
- $d = d_1 \cup d_2 \cup \{(s_0, x, s) \mid (s_{0_i}, x, s) \in d_i, i = 1, 2\}$

Satz

$$L(A_1 \cup A_2) = L(A_1) \cup L(A_2).$$

Konkatenationsautomat

Gegeben: $A_1 = (Z_1, I, d_1, s_{0_1}, F_1)$, $A_2 = (Z_2, I, d_2, s_{0_2}, F_2)$ mit $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

$A_1 \circ A_2 = (Z_1 \cup Z_2, I, d, s_{0_1}, F)$ mit

- $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2, & \text{falls } s_{0_2} \in F_2 \\ F_2 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $d = d_1 \cup d_2 \cup \{(s', x, s) \mid (s_{0_2}, x, s) \in d_2, s' \in F_1\}$

Satz

$$L(A_1 \circ A_2) = L(A_1)L(A_2).$$

Sternautomat

Gegeben: $A = (Z, I, d, s_0, F)$.

$A_* = (Z \cup \{s_*\}, I, d_*, s_*, F \cup \{s_*\})$ mit $s_* \notin Z$ und

$$d_* = d \cup \{(s', x, s) \mid (s_0, x, s) \in d, s' \in F \cup \{s_*\}\}$$

Satz

$$L(A_*) = L(A)^*.$$