Das P=NP-Problem

Besitzen (Entscheidungs-)Probleme mit einer **N**icht-deterministischen **P**olynimiellen Lösung immer auch eine deterministische **P**olynomielle Lösung?

- Eines der bekanntesten offenen Probleme der Informatik
- Nobelpreis-verdächtig

Anmerkungen zum Nichtdeterminismus

- Manches ist nichtdeterministisch

  Suchen in Bereichen, unsicheres und unvollständiges Wissen, Expertensysteme, Spiele

- Gleichwertigkeit ist nichtdeterministisch

  Auswerten und Beweisen im selben Rahmen

- Manchmal bequem (und schadet nicht)
- Einschränken, wenn gewünscht und nötig

Beispiel: Little-Solitaire

solitaire

opns: $solitaire, won\colon \{0,1\}^* \to BOOL$

$move\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$

vars: $u, v, w \in \{0,1\}^*$

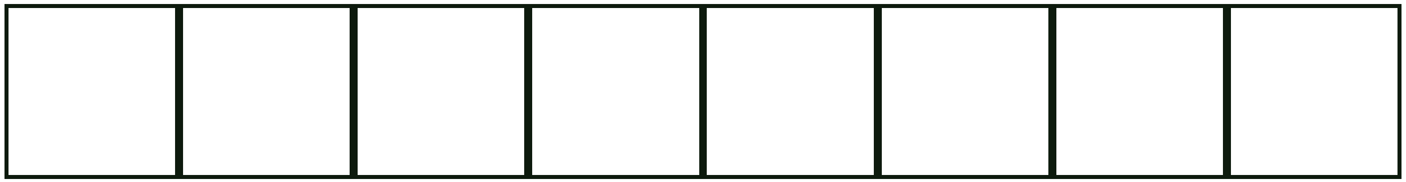
eqns: $solitaire(w) = won(move(w))$

$won(w) = count(1,w) = 1$

$move(u110v) = move(u001v)$

$move(u011v) = move(u100v)$

$move(w) = w$



Probleme in NP

- SAT (Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik)

  Eingabe: Aussagenlogische Formel f.

  Ausgabe: Ja gdw eine Belegung der Variablen in f mit True oder False existiert, so dass f gilt.

  Lösung 1: Probiere alle 2^k Belegungen $\in O(2^k)$

  Lösung 2: Rate richtige Belegung $\in O(k)$

Aussagenlogische Formel

Sei Var eine Menge von Variablen.

Menge WFF aller aussagenlogischen Formeln

1. $v \in Var \Longrightarrow v \in WFF$
2. $S_1, S_2 \in WFF \Longrightarrow$
   $(S_1 \vee S_2), (S_1 \wedge S_2), \neg S_1 \in WFF$

Beispiel

Ein Gerät mit vier $0/1$-Schaltern befindet sich in einem betriebssicheren Zustand, wenn folgende Schalterstellungen beachtet werden:

1. Wenn A und B gleich 0, dann C gleich 1
2. A oder C gleich 1
3. A, B, C gleich 1 oder B, C, D gleich1 oder A, D gleich1

P=NP-Problem

- Lässt sich das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik deterministisch in polynomieller Zeit lösen?
- Entsprechende Frage für viele praktisch relevante Probleme (Maschinenbelegung, Tourenplanung, Handelsreisende, Färbung, Lagerhaltung, . . .)

---

* P: alle polynomiell lösbaren (Entscheidungs-)Probleme
NP: alle nichtdeterministisch polynomiell lösbaren (Entscheidungs-)Probleme

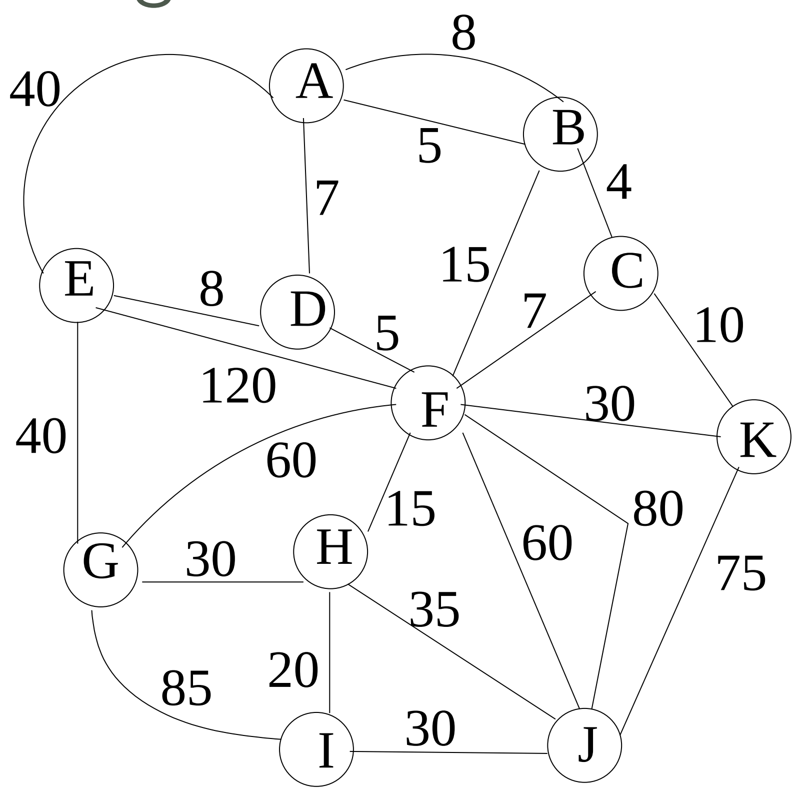
3SAT

- 3SAT (Spezialfall von SAT)
  - Eingabe: Aussagenlogische Formel f der Form
    $$c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_n,$$
    so dass
    - c_i: Klausel der Form $L_1 \vee L_2 \vee L_3$,
    - L_j: Literal der Form x oder $\neg x$
    - x: Variable.
  - Ausgabe: Ja gdw eine Belegung der Variablen in f mit True oder False existiert, so dass f gilt.

TSP

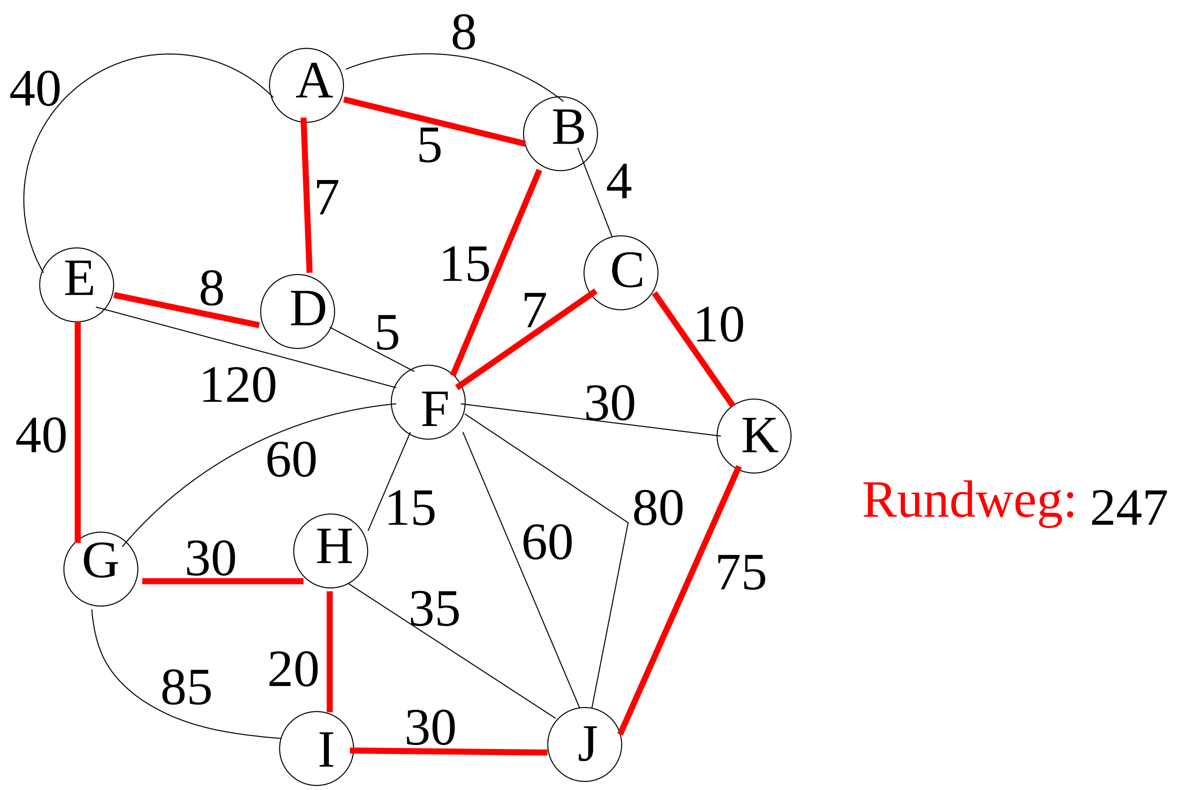
- TSP (Traveling Salesperson Problem)
  - Eingabe: Ungerichteter Graph G mit natürlichen Zahlen als Kantenmarkierungen und eine Zahl k.

    Beispiel für G:



◦ Ausgabe: Ja gdw G einen Rundweg p besitzt, der jeden Knoten aus G genau einmal besucht und höchstens k lang ist.

Beispiel: Ja für k = 250



Ordnung auf NP durch Reduktion

Eine Reduktion von

$$dp_1\colon A_1^* \to BOOL \quad \text{auf} \quad dp_2\colon A_2^* \to BOOL$$

ist eine CE-S-Operation $red\colon A_1^* \to A_2^*$, so dass

1. $T^{red} \in O(n^l)$ für ein $l \in \mathbb{N}$
2. für alle $w \in A_1^*$ gilt: $dp_1(w) = dp_2(red(w))$.

Schreibweise: $dp_1 \leq dp_2$

Theorem

$$dp_1 \leq dp_2 \text{ und } dp_2 \in P \text{ impl. } dp_1 \in P.$$

NP-Vollständigkeit

Definition

$dp_0 \in NP$ heißt NP-vollständig, falls $dp \leq dp_0$ für alle $dp \in NP$.

Theorem

dp_0 NP-vollständig und $dp_0 \in P$ impl. $NP \subseteq P$.

NP-vollständige Probleme

Theorem (Cook 71)
Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist NP-vollständig.
Beweisidee: Reduziere jedes Problem aus NP auf SAT.

Theorem
3SAT ist NP-vollständig.
Beweisidee: Reduziere SAT auf 3SAT.

Theorem

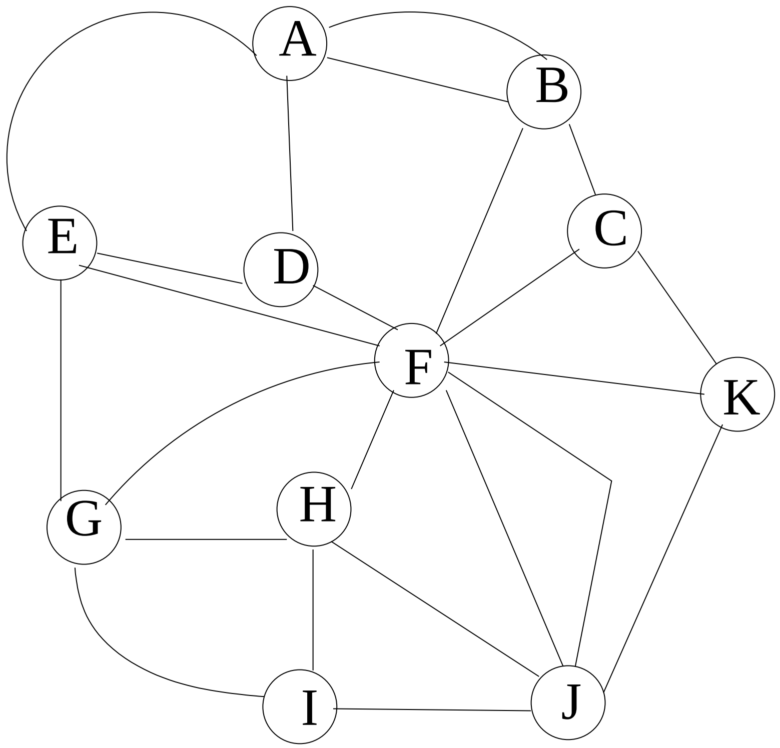
TSP ist NP-vollständig.

Beweisidee: Reduziere HAM auf TSP (HAM ist ein Spezialfall von TSP...)

HAM

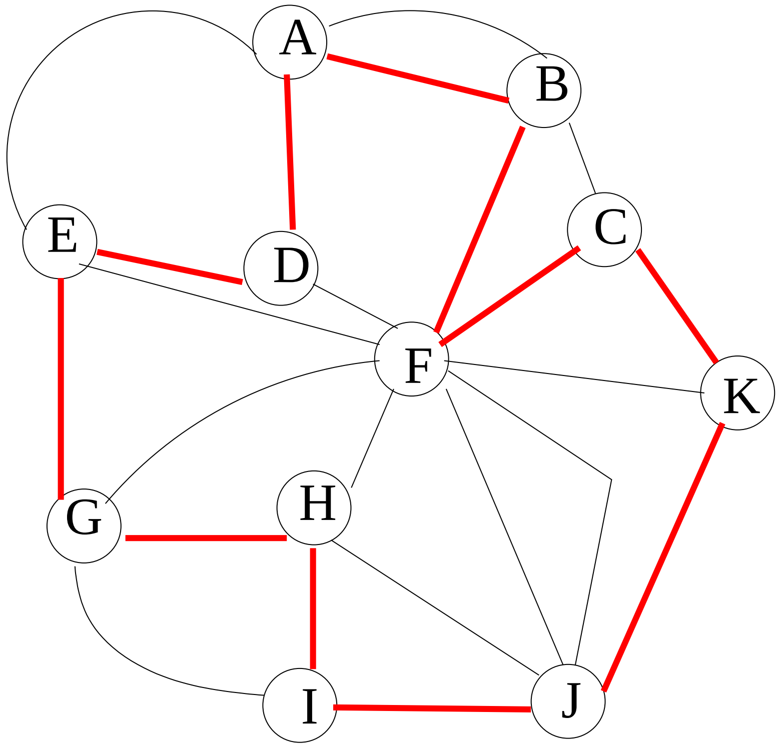
- HAM (Hamiltonian Circuit Problem)
  - Eingabe: Ein ungerichteter Graph G.

    Beispiel:



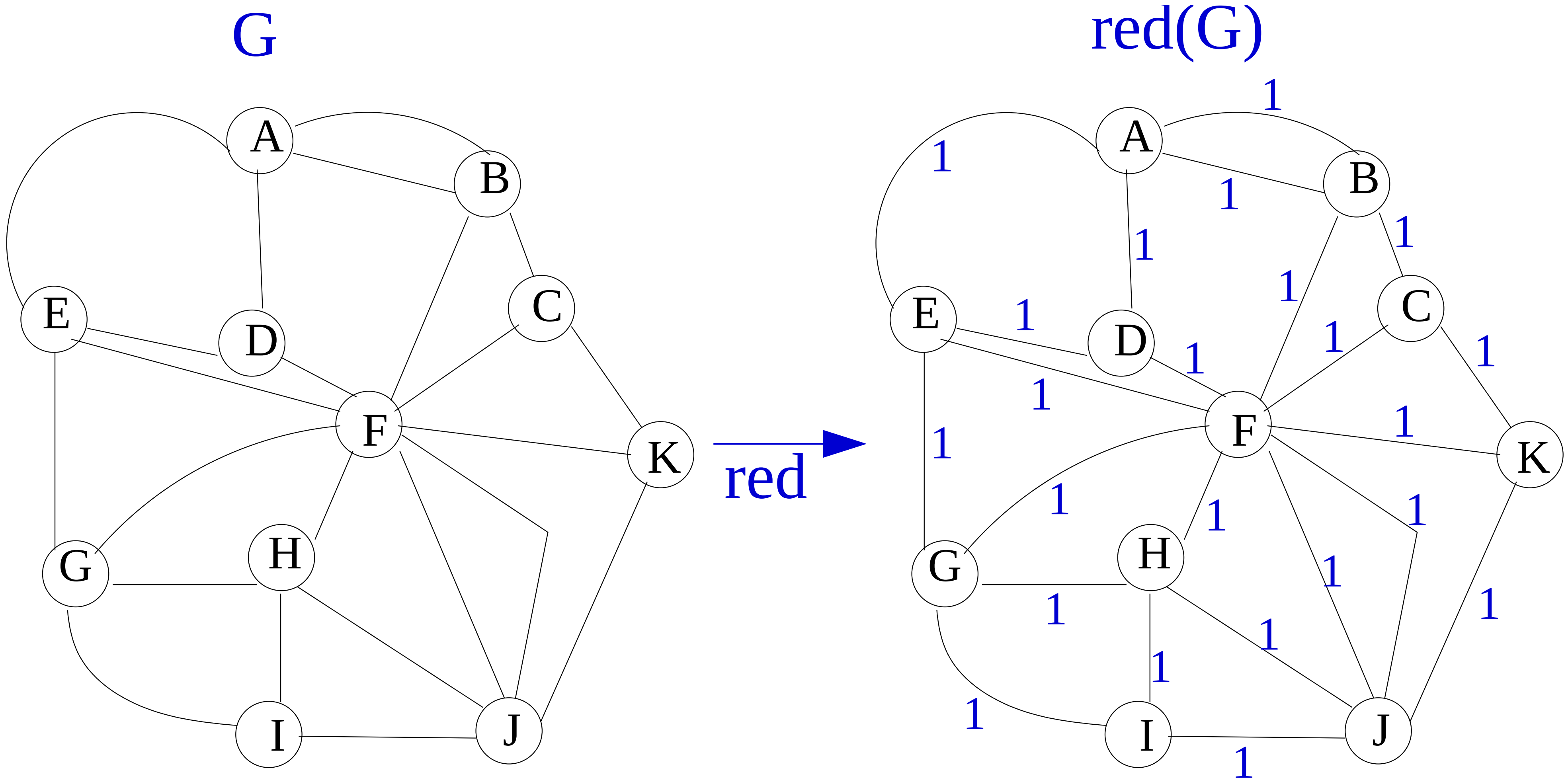
- ◦ Ausgabe: JA gdw G einen Rundweg besitzt, der jeden Knoten genau einmal besucht.

  Beispiel:



Beobachtung: HAM ist in NP.

Reduktion von HAM auf TSP



k:= Anzahl der Knoten in G

Theorem

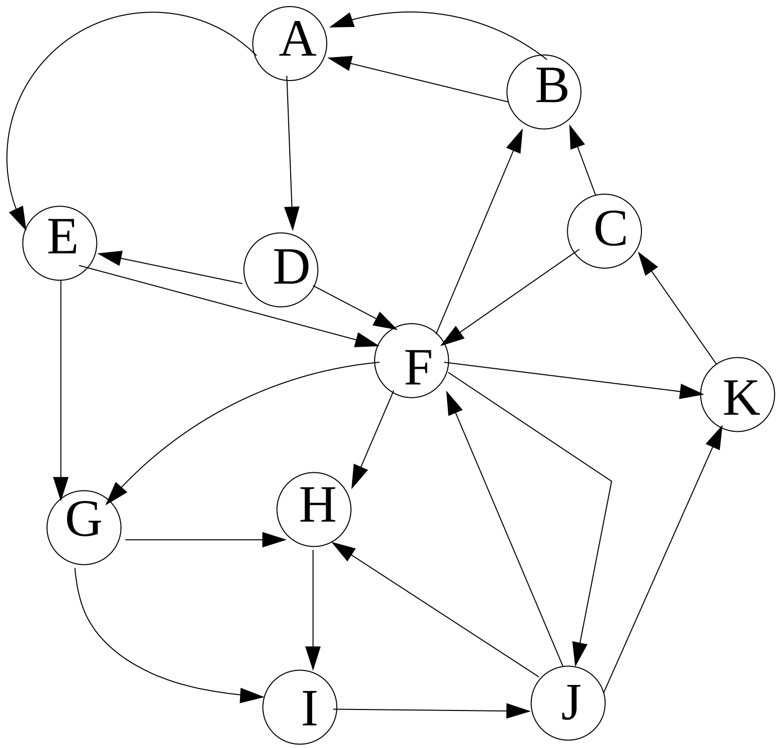
HAM ist NP-vollständig.

Beweisidee: Reduziere DHAM auf HAM...(DHAM ist HAM für gerichtete Graphen ....)

DHAM

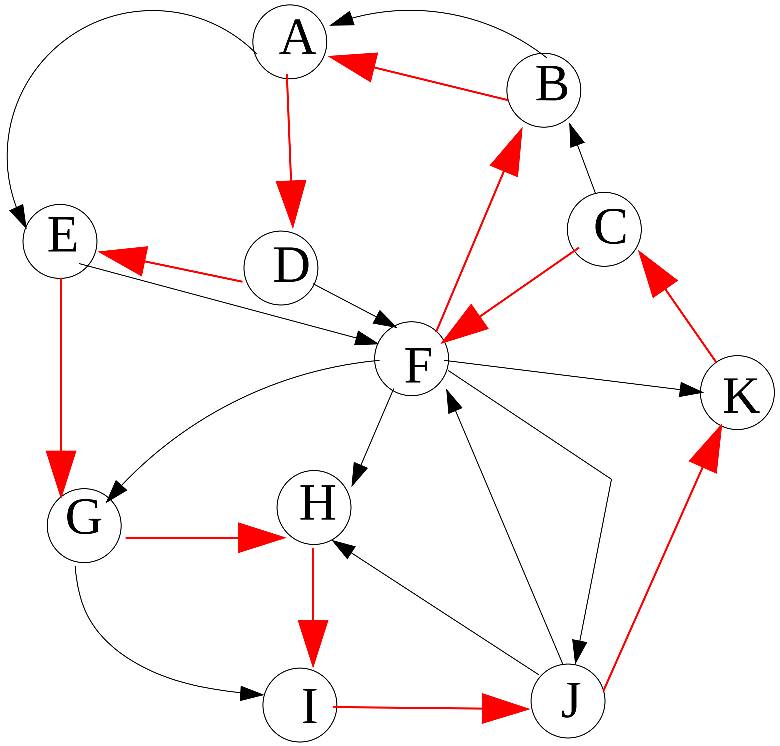
- DHAM (Directed Hamiltonian Circuit Problem)
  - Eingabe: Ein gerichteter Graph G.

    Beispiel:



◦ Ausgabe: JA gdw G einen Rundweg (in Pfeilrichtung) besitzt, der jeden Knoten genau einmal besucht.

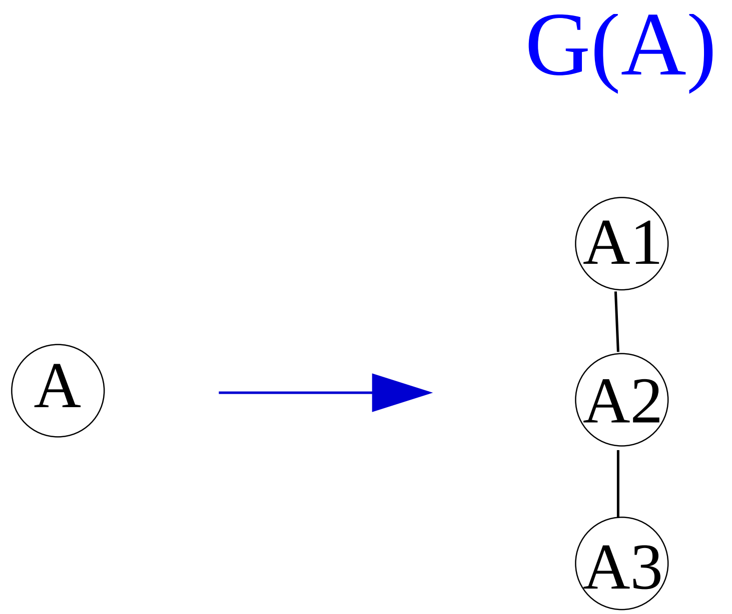
Beispiel:



Beobachtung: DHAM ist in NP.

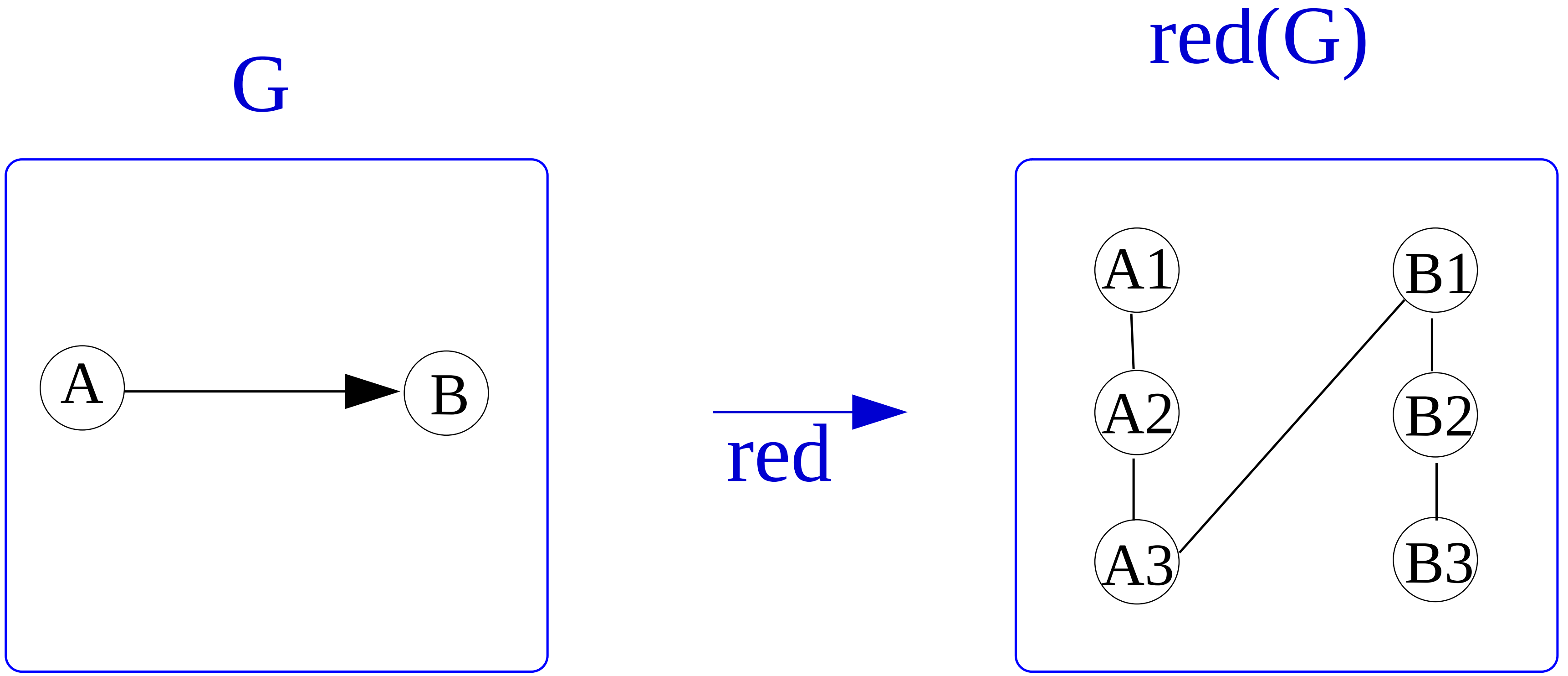
Reduktion von DHAM auf HAM

1. Für jeden Knoten A im Eingabegraph G von DHAM konstruiere $G(A)$ wie folgt:



2. Für jede Kante von A nach B ziehe eine Kante in $red(G)$ von $A3$ nach $B1$.

Skizze



Theorem

DHAM ist NP-vollständig.

Beweisidee: Reduziere 3SAT auf DHAM.