

# Matrizenmultiplikation (klassisch)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \text{ mit } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \text{ für}$$
$$i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, p$$

# Aufwand der klassischen Matrizenmultiplikation

- ▶ Annahme:  $m = p = n$
- ▶ Gezählte Operationen: *Add*: Additionen  
*Mult*: Multiplikationen

$$T_{Mult}^{klassisch}(n) = n^2 \cdot n = n^3$$

$$T_{Add}^{klassisch}(n) = n^2 \cdot (n - 1) = n^3 - n^2$$

# Algorithmus von Winograd

- ▶ Ziel: Reduktion der Anzahl der Multiplikationen
- ▶ Grundüberlegung:  $wx + yz = (w + z)(y + x) - wy - xz$
- ▶  $A, B$  :  $(n, n)$ -Matrizen mit  $n = 2m$
- ▶ Berechnung von  $C = A \circ B$ :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m (a_{i(2j-1)} + b_{(2j)k}) \cdot (a_{i(2j)} + b_{(2j-1)k}) - W(A_i) - W(B^k)$$

- ▶  $W(A_i) = \sum_{j=1}^m a_{i(2j-1)} \cdot a_{i(2j)}$
- ▶  $W(B^k) = \sum_{j=1}^m b_{(2j-1)k} \cdot b_{(2j)k}$

# Aufwand des Algorithmus von Winograd

$$T_{Mult}^{Winograd}(n) = \frac{1}{2}n^3 + n^2$$

$$T_{Add}^{Winograd}(n) = \frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$$

# Algorithmus von Strassen (für (2,2)-Matrizen)

$$s_1 = a_{21} + a_{22}$$

$$s_2 = s_1 - a_{11}$$

$$s_3 = a_{11} - a_{21}$$

$$s_4 = a_{12} - s_2$$

$$s_5 = b_{12} - b_{11}$$

$$s_6 = b_{22} - s_5$$

$$s_7 = b_{22} - b_{12}$$

$$s_8 = s_6 - b_{21}$$

$$m_1 = s_2 \cdot s_6$$

$$m_2 = a_{11} \cdot b_{11}$$

$$m_3 = a_{12} \cdot b_{21}$$

$$m_4 = s_3 \cdot s_7$$

$$m_5 = s_1 \cdot s_5$$

$$m_6 = s_4 \cdot b_{22}$$

$$m_7 = a_{22} \cdot s_8$$

$$t_1 = m_1 + m_2$$

$$t_2 = t_1 + m_4$$

$$t_3 = t_1 + m_5$$

$$c_{11} = m_2 + m_3$$

$$c_{21} = t_2 - m_7$$

$$c_{12} = t_3 + m_6$$

$$c_{22} = t_2 + m_5$$

# Aufwand

$$T_{Mult}^{Strassen}(2) = 7$$

$$T_{Add}^{Strassen}(2) = 15$$

## Fortführung auf $(2^k, 2^k)$ -Matrizen

- $A_{ij}, B_{ij}$ :  $(2^{k-1}, 2^{k-1})$ -Matrizen für  $i, j \in \{1, 2\}$  und  $k > 1$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$C_{11} = A_{11} \circ B_{11} + A_{12} \circ B_{21},$$

$$C_{12} = A_{11} \circ B_{12} + A_{12} \circ B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21} \circ B_{11} + A_{22} \circ B_{21},$$

$$C_{22} = A_{21} \circ B_{12} + A_{22} \circ B_{22}$$

# Aufwand

$$T_{Mult}^{Strassen}(n) = n^{\lg 7}$$

$$T_{Add}^{Strassen}(n) = 5n^{\lg 7} - 5n^2$$

mit  $n = 2^k$  und  $k \geq 1$ .



# Aufwandsvergleich der Matrizenmultiplikations-Algorithmen (Multiplikationen)

$n$	klassisch: $n^3$	Winograd: $\frac{1}{2}n^3 + n^2$	Strassen: $n^{2,81}$
8	512	320	345
64	262 144	135 168	118 950
256	16 777 216	8 454 144	5 849 979
⋮	⋮	⋮	⋮