Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

> Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist in $O(n^3)$.

- Cocke-Kasami-Younger-Algorithmus zur Lösung des Wortproblems kontextfreier Sprachen.
- Voraussetzung: Erzeugende Grammatik ist in Chomsky-Normalform.

Chomsky-Normalform (CNF)

- Vereinfacht die Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.

- Vereinfacht den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.

Chomsky-Normalform (CNF)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ ist in Chomsky-Normalform, falls für jede Regel $A ::= r \in P$ gilt:

$$r \in N^2 \text{ oder } r \in T$$

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G_{CNF} in Chomsky-Normalform, so dass

$$L(G) - \{\lambda\} = L(G_{CNF}).$$

1.Schritt: Eliminierung von λ-Produktionen

Eine Produktion der Form

$$A ::= \lambda$$

heißt λ-Produktion.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik $G_{\lambda-\mathrm{frei}}$ ohne λ-Produktionen, so dass

$$L(G) = L(G_{\lambda-\mathrm{frei}}) - \{\lambda\}.$$

Eliminierung von λ-Produktionen

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

1. (Sammeln aller $A \in N$ mit $A \xrightarrow{*} \lambda$.)

$$M_0 = \{A \in N \mid A ::= \lambda\}$$
$$M_{i+1} = M_i \cup \{A \in N \mid A ::= w \in P, w \in M_i^*\}$$
$$M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

$M' = \{A \in N \mid A ::= \lambda\}$
repeat
$M := M'$;
$M' := M \cup \{A \in N \mid A ::= w \in P, w \in (M)^*\}$
until $M' = M$

Beobachtung

$$A \xrightarrow[P]{*} \lambda \Longleftrightarrow A \in M$$

2. (Konstruktion von $P_{\lambda-\text{frei}}$)
   $P_0 = P$
   $P_{i+1} = P_i \cup \{A ::= u_1 u_2 \mid A ::= u_1 B u_2 \in P_i, B \in M\}$
   $P' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i$
   $P_{\lambda-\text{frei}} = P' - \{p \in P' \mid p = A ::= \lambda\}$
3. (Konstruktion von $G_{\lambda-\text{frei}}$)

$$G_{\lambda-\text{frei}} = (N, T, P_{\lambda-\text{frei}}, S)$$

Beispiel

$$\boxed{S ::= AB, A ::= aAA|\lambda, B ::= bBB|\lambda}$$

$$M_0 = \{A, B\},\ M_1 = \{A, B, S\},\ M_1 = M_2$$

$$P_0 :\ \ S ::= AB, A ::= aAA|\lambda, B ::= bBB|\lambda$$
$$P_1 :\ \ S ::= AB|A|B, A ::= aAA|aA|\lambda, B ::= bBB|bB|\lambda$$
$$P_2 :\ \ S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda$$
$$P_2 = P_3$$

$$P_{\lambda-\text{frei}} :\ \ S ::= AB|A|B, A ::= aAA|aA|a, B ::= bBB|bB|b$$

2.Schritt: Eliminierung von Kettenregeln

Eine Produktion der Form

$$A ::= B$$

mit $B \in N$ heißt Kettenregel.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G_{K-frei} ohne Kettenregeln, so dass

$$L(G) = L(G_{K-frei}).$$

Eliminierung von Kettenregeln

1. (Finden aller Paare $(A, B) \in N \times N$ mit $A \xrightarrow{*} B$)
   $M_0 = \{(A, A) \mid A \in N\}$
   $M_{i+1} = M_i \cup \{(A, C) \mid (A, B) \in M_i, B ::= C \in P\}$
   $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$

Beobachtung

$$(A, B) \in M \Longleftrightarrow A \xrightarrow{*} B$$

2. (Konstruktion von G_{K-frei})

$$G_{K-frei} = (N, T, P_{K-frei}, S)$$

mit

$$P_{K-frei} = \{A ::= r \mid (A, B) \in M, B ::= r \in P, r \notin N\}.$$

Beispiel

$$\boxed{S ::= A, A ::= B, B ::= b}$$

$$M_0 = \{(S,S),(A,A),(B,B)\}$$
$$M_1 = \{(S,S),(A,A),(B,B),(S,A),(A,B)\}$$
$$M_2 = \{(S,S),(A,A),(B,B),(S,A),(A,B),(S,B)\}$$

$$P_{K-frei}:\ \ S ::= b, A ::= b, B ::= b$$

Eliminierung nutzloser Symbole

Ein Symbol $A \in N$ heißt nützlich, falls

$$S \xrightarrow[P]{*} u_1 A u_2 \xrightarrow[P]{*} w$$

mit $w \in T^*$.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G_{red} ohne nutzlose Symbole, so dass

$$L(G) = L(G_{red}).$$

3. und 4. Schritt

Sei $G = (N, T.P, S)$ eine kfG ohne λ-Produktionen und ohne Kettenregeln.

- Eliminieren der terminalen Symbole aus allen rechten Regelseiten der Länge ≥ 2 (vgl. Übung)
- Verkürzen der rechten Regelseiten, deren Länge größer als 2 ist (4. Übungblatt)

Leerheitsproblem

- Leerheitsproblem von $L \subseteq T^*$: es ist zu entscheiden, ob $L = \emptyset$.
- Leerheitsproblem $LP(G)$ einer Grammatik G ist Leerheitsproblem von $L(G)$.
- $LP(G)$ ist für kontextfreie Grammatiken entscheidbar.

Typ	Bezeichnung	Automaten	Leerheitsproblem
0	allgemein	Turing-Maschinen	-
1	kontext-sensitiv, monoton	linear beschränkte Automaten	-
2	kontextfrei	Kellerautomaten	+
3	regulär, rechtslinear	endliche Automaten	+