Dr. Sabine Kuske
Studiengang Informatik
Linzer Str. 9a
OAS 3005
Tel.: 2335, 3697 (Sekr.), Fax: 4322
E-Mail: kuske@informatik.uni-bremen.de
www.informatik.uni-bremen.de/theorie

13. Mai 2008
Aufgaben 3

Theoretische Informatik 2

3. Übungsblatt

1. Betrachte die Spezifikation **mergesort** aus Abschnitt 3.7 des Skripts. Gib für alle $m, n \geq 1$ Eingabewörter $u, v \in A^*$ der Längen $\mathit{length}(u) = m$ und $\mathit{length}(v) = n$ an, so dass die Auswertung von $\mathit{merge}(u, v)$ mindestens $m + n$ Schritte braucht. (15%)

2. Betrachte die folgende Spezifikation **quicksort**:

   quicksort
   opns: $\mathit{qsort}\colon A^* \to A^*$, $\mathit{filter}\colon A \times A^* \times \mathit{BOOL} \to A^*$
   vars: $x, y : A$, $v : A^*$, $b : \mathit{BOOL}$
   eqns:
   $$\begin{aligned}
   \mathit{qsort}(\lambda) &= \lambda \\
   \mathit{qsort}(xv) &= \mathit{qsort}(\mathit{filter}(x, v, T))\, x\, \mathit{qsort}(\mathit{filter}(x, v, F)) \\
   \mathit{filter}(x, \lambda, b) &= \lambda \\
   \mathit{filter}(x, yv, b) &= \mathit{if}\ (y \leq x) = b\ \mathit{then}\ y\, \mathit{filter}(x, v, b)\ \mathit{else}\ \mathit{filter}(x, v, b)
   \end{aligned}$$

   (a) Zeige, dass die Auswertung von $\mathit{qsort}(w)$ für Eingabewörter w der Länge n, die falsch herum sortiert sind, mindestens $n^2 + 3n$ Schritte braucht. Dabei ist ein Wort w falsch herum sortiert, falls für jedes Zeichen x in w alle nachfolgenden kleiner als x sind. (15%)

   (b) Benötigt die Auswertung von $\mathit{qsort}(w)$ mindestens ebenso viele Schritte, wenn $\mathit{is\text{-}sorted}(w) = T$ gilt? (Die Operation *is-sorted* ist in Abschnitt 3.2. des Skripts definiert.) Begründe Deine Antwort; ein Beweis ist nicht gefordert. (5%)

3. Der klassische Algorithmus zur Multiplikation von (n, n)-Matrizen benötigt n^3 Multiplikationen und $n^3 - n^2$ Additionen. Dagegen verwendet der Algorithmus von Winograd $\frac{1}{2}n^3 + n^2$ Multiplikationen und $\frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$ Additionen.

   Für welche $n \in \mathbb{N}$ arbeitet der Algorithmus von Winograd effizienter, wenn eine Multiplikation gegenüber einer Addition fünfmal soviel Zeit benötigt? (15%)

4. Für Funktionen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ gilt $g \in O(f)$ genau dann, wenn Konstanten $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $g(n) \leq c \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_0$.

   Sei $h_1(n) = f(n) + g(n)$ und $h_2(n) = \max(f(n), g(n))$. Zeige, dass dann $h_1 \in O(h_2)$ gilt. (10%)

5. Sei op eine CE-S-Operation mit $T^{op}(n) = 3n^3(n+5)(n-4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden drei Aussagen sind korrekt?

   (a) $T^{op}(n) \in O(n)$

   (b) $T^{op}(n) \in O(n^6)$

   (c) $T^{op}(n) \in O(\frac{1}{2}n^5)$

   (10%)

6. Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Menge $O(n^k)$ echt in $O(n^{k+1})$ enthalten ist. (Hinweis: Zeige, dass einerseits $O(n^k) \subseteq O(n^{k+1})$ gilt, aber andererseits $O(n^{k+1}) \subseteq O(n^k)$ nicht gilt.) (10%)

7. Wie verhalten sich die Klassen $O(n!)$ und $O(2^n)$ zueinander (d.h., ist eine von beiden echt in der anderen enthalten, sind beide gleich, weder noch)? Weise die Korrektheit der Antwort nach. (20%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 26.05.08 in den Tutorien abzugeben.