

Theoretische Informatik 2

3. Übungsblatt

1. Betrachte die Spezifikation **mergesort** aus Abschnitt 3.7 des Skripts. Gib für alle $m, n \geq 1$ Eingabewörter $u, v \in A^*$ der Längen $\text{length}(u) = m$ und $\text{length}(v) = n$ an, so dass die Auswertung von $\text{merge}(u, v)$ mindestens $m + n$ Schritte braucht. (15%)

2. Betrachte die folgende Spezifikation **quicksort**:

quicksort

opns: $qsort: A^* \rightarrow A^*$, $filter: A \times A^* \times \text{BOOL} \rightarrow A^*$

vars: $x, y: A$, $v: A^*$, $b: \text{BOOL}$

eqns: $qsort(\lambda) = \lambda$

$qsort(xv) = qsort(filter(x, v, T))xqsort(filter(x, v, F))$

$filter(x, \lambda, b) = \lambda$

$filter(x, yv, b) = \text{if } (y \leq x) = b \text{ then } yfilter(x, v, b) \text{ else } filter(x, v, b)$

(a) Zeige, dass die Auswertung von $qsort(w)$ für Eingabewörter w der Länge n , die falsch herum sortiert sind, mindestens $n^2 + 3n$ Schritte braucht. Dabei ist ein Wort w falsch herum sortiert, falls für jedes Zeichen x in w alle nachfolgenden kleiner als x sind. (15%)

(b) Benötigt die Auswertung von $qsort(w)$ mindestens ebenso viele Schritte, wenn $is\text{-sorted}(w) = T$ gilt? (Die Operation $is\text{-sorted}$ ist in Abschnitt 3.2. des Skripts definiert.) Begründe Deine Antwort; ein Beweis ist nicht gefordert. (5%)

3. Der klassische Algorithmus zur Multiplikation von (n, n) -Matrizen benötigt n^3 Multiplikationen und $n^3 - n^2$ Additionen. Dagegen verwendet der Algorithmus von Winograd $\frac{1}{2}n^3 + n^2$ Multiplikationen und $\frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$ Additionen.

Für welche $n \in \mathbb{N}$ arbeitet der Algorithmus von Winograd effizienter, wenn eine Multiplikation gegenüber einer Addition fünfmal soviel Zeit benötigt? (15%)

4. Für Funktionen $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt $g \in O(f)$ genau dann, wenn Konstanten $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $g(n) \leq c \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $h_1(n) = f(n) + g(n)$ und $h_2(n) = \max(f(n), g(n))$. Zeige, dass dann $h_1 \in O(h_2)$ gilt. (10%)

5. Sei op eine CE-S-Operation mit $T^{op}(n) = 3n^3(n+5)(n-4)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden drei Aussagen sind korrekt?

(a) $T^{op}(n) \in O(n)$

(b) $T^{op}(n) \in O(n^6)$

(c) $T^{op}(n) \in O(\frac{1}{2}n^5)$

(10%)

6. Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Menge $O(n^k)$ echt in $O(n^{k+1})$ enthalten ist. (Hinweis: Zeige, dass einerseits $O(n^k) \subseteq O(n^{k+1})$ gilt, aber andererseits $O(n^{k+1}) \not\subseteq O(n^k)$ nicht gilt.) (10%)

7. Wie verhalten sich die Klassen $O(n!)$ und $O(2^n)$ zueinander (d.h., ist eine von beiden echt in der anderen enthalten, sind beide gleich, weder noch)? Weise die Korrektheit der Antwort nach. (20%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 26.05.08 in den Tutorien abzugeben.