Grammatiktypen

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine Chomsky-Grammatik.

G heißt

- monoton (Typ 1), falls $length(u) \leq length(v)$
- kontextfrei (Typ 2), falls $length(u) = 1$
- regulär,rechtslinear (Typ 3), falls $length(u) = 1$ und $v \in T^* \cup T^+N$

für alle Produktionen $u ::= v$ aus P.

Chomsky-Hierarchie

Typ	Bezeichnung	Automaten
0	allgemein	Turing-Maschinen
1	monoton, kontext-sensitiv	linear beschränkte Automaten
2	kontextfrei	Kellerautomaten
3	regulär, rechtslinear	endliche Automaten

Wortprobleme

- Wortproblem von $L \subseteq T^*$: für alle $w \in T^*$ als Eingaben ist zu entscheiden, ob $w \in L$.
- Wortproblem $WP(G)$ einer Grammatik G ist Wortproblem von $L(G)$.
- $WP(G) \in O(n^3)$ für kontextfreie Grammatiken nach Cocke-Kasami-Younger.
- $WP(G) \in O(n)$, falls ein deterministischer Kellerautomat K existiert mit $L(G) = L(K)$.
- Insbes. $WP(G) \in O(n)$ für rechtslineares G wegen endlicher Automaten.

Typ	Bezeich.	Automaten	Wortproblem
0	allgemein	Turing-Maschinen	- (Reduktion Halteproblem auf WP)
1	kontext-sensitiv, monoton	linear beschränkte Automaten	$PSPACE = NPSPACE$
2	kontext-frei	Kellerautomaten	$O(n^3)$ (CKY)
3	regulär, rechtsli-near	endliche Automa-ten	$O(n)$ (Det. endliche Au-tomaten)

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken

Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist mit einem Zeitaufwand der Größenordnung $O(n^3)$ lösbar.

- Cocke-Kasami-Younger-Algorithmus zur Lösung des Wortproblems kontextfreier Sprachen.
- Voraussetzung: Erzeugende Grammatik ist in Chomsky-Normalform.

Chomsky-Normalform (CNF)

- Vereinfacht die Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.
- Vereinfacht den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.

Chomsky-Normalform (CNF)

Eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ ist in Chomsky-Normalform, falls für jede Regel $(A ::= r) \in P$ gilt:

$$r \in N^2 \text{ oder } r \in T$$

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G_{CNF} in Chomsky-Normalform, so dass

$$L(G) \setminus \{\lambda\} = L(G_{CNF}).$$

1.Schritt: Eliminierung von λ-Produktionen

Eine Produktion der Form

$$A ::= \lambda$$

heißt λ-Produktion.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G' ohne λ-Produktionen, so dass

$$L(G) = L(G') \setminus \{\lambda\}.$$

Eliminierung von λ-Produktionen

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

1. (Sammeln aller $A \in N$ mit $A \xrightarrow{*} \lambda$.)

$M_0 = \{A \in N \mid (A ::= \lambda) \in P\}$

$M_{i+1} = M_i \cup \{A \in N \mid (A ::= w) \in P, w \in M_i^*\}$

Beobachtung

(a) Es existiert ein k, so dass $M_k = M_{k+1}$ gilt.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $M_k = M_{k+1}$. Dann gilt:

$$A \xrightarrow[P]{*} \lambda \iff A \in M_k.$$