

# Eliminierung von $\lambda$ -Produktionen

Sei  $G = (N, T, P, S)$  eine kontextfreie Grammatik.

1. (Sammeln aller  $A \in N$  mit  $A \xrightarrow{*} \lambda$ .)

$$M_0 = \{A \in N \mid (A ::= \lambda) \in P\}$$

$$M_{i+1} = M_i \cup \{A \in N \mid (A ::= w) \in P, w \in M_i^*\}$$

## Beobachtung

(a) Es existiert ein  $k$ , so dass  $M_k = M_{k+1}$  gilt.

(b) Sei  $k \in \mathbb{N}$  die kleinste Zahl mit  $M_k = M_{k+1}$ . Dann gilt:

$$A \xrightarrow[P]{*} \lambda \iff A \in M_k.$$

## 2. (Konstruktion der neuen Regelmenge $P'$ )

$$P_0 = P$$

$$P_{i+1} = P_i \cup \{A ::= u_1 u_2 \mid (A ::= u_1 B u_2) \in P_i, B \in M_k\}$$

Sei  $m \in \mathbb{N}$  die kleinste Zahl mit  $P_m = P_{m+1}$ . Dann:

$$P' = P_m \setminus \{A ::= \lambda\}$$

## 3. (Konstruktion der Grammatik $G'$ )

$$G' = (N, T, P', S)$$

## Beispiel

$$S ::= AB, A ::= aAA|\lambda, B ::= bBB|\lambda$$

$$M_0 = \{A, B\}, M_1 = \{A, B, S\}, M_1 = M_2$$

$$P_0 : S ::= AB, A ::= aAA|\lambda, B ::= bBB|\lambda$$

$$P_1 : S ::= AB|A|B, A ::= aAA|aA|\lambda, B ::= bBB|bB|\lambda$$

$$P_2 : S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda$$

$$P_2 = P_3$$

$$P' : S ::= AB|A|B, A ::= aAA|aA|a, B ::= bBB|bB|b$$

## 2.Schritt: Eliminierung von Kettenregeln

Eine Produktion der Form

$$A ::= B$$

mit  $B \in N$  heißt **Kettenregel**.

### Satz

Für jede kontextfreie Grammatik  $G$  gibt es eine kontextfreie Grammatik  $G'$  ohne Kettenregeln, so dass

$$L(G) = L(G').$$

# Eliminierung von Kettenregeln

1. (Finden aller Paare  $(A, B) \in N \times N$  mit  $A \xrightarrow{*} B$ )

$$M_0 = \{(A, A) \mid A \in N\}$$

$$M_{i+1} = M_i \cup \{(A, C) \mid (A, B) \in M_i, (B ::= C) \in P\}$$

## Beobachtung

Sei  $k \in \mathbb{N}$  die kleinste Zahl mit  $M_k = M_{k+1}$ . Dann gilt:

$$(A, B) \in M_k \iff A \xrightarrow{*} B.$$

## 2. (Konstruktion von $G'$ )

$$G' = (N, T, P', S)$$

mit

$$P' = \{A ::= r \mid (A, B) \in M_k, (B ::= r) \in P, r \notin N\}.$$

## Beispiel

$$S ::= A, A ::= B, B ::= b$$

$$M_0 = \{(S, S), (A, A), (B, B)\}$$

$$M_1 = \{(S, S), (A, A), (B, B), (S, A), (A, B)\}$$

$$M_2 = \{(S, S), (A, A), (B, B), (S, A), (A, B), (S, B)\}$$

$$P' : S ::= b, A ::= b, B ::= b$$

## 3. und 4. Schritt

- ▶ Eliminieren der terminalen Symbole aus allen rechten Regelseiten der Länge  $\geq 2$  (4. Übungsblatt).
- ▶ Verkürzen der rechten Regelseiten, deren Länge größer als 2 ist (vgl. Übung).



# Eliminierung nutzloser Symbole

Ein Symbol  $A \in N$  heißt **nützlich**, falls

$$S \xrightarrow[P]{*} u_1 A u_2 \xrightarrow[P]{*} w$$

mit  $w \in T^*$ .

## Satz

Für jede kontextfreie Grammatik  $G$  gibt es eine kontextfreie Grammatik  $G'$  ohne nutzlose Symbole, so dass

$$L(G) = L(G').$$