

Theoretische Informatik 2

4. Übungsblatt

In den folgenden Aufgaben wird vorausgesetzt, dass natürliche Zahlen nicht unär dargestellt werden, sondern als Dezimalzahlen (oder alternativ als Binärzahlen).

1. Das *Rucksack*-Problem ist *NP*-vollständig und erhält als Eingaben eine Sequenz $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}^*$ mit $a_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, n$ und ein $k \in \mathbb{N}$. Die Ausgabe ist genau dann T , wenn eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass gilt:

$$\sum_{i \in I} a_i = k.$$

Betrachte das Problem *MaxMin* mit den folgenden Eingaben:

- $b_1 \dots b_n, c_1 \dots c_n \in \mathbb{N}^*$ mit $b_i, c_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, n$,
- $Max, Min \in \mathbb{N}$.

Die Ausgabe von *MaxMin* ist genau dann T , wenn eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass

$$\sum_{i \in I} b_i \leq Max \text{ und } \sum_{i \in I} c_i \geq Min.$$

Zeige, dass *MaxMin* *NP*-vollständig ist, d.h.:

- (a) Zeige zuerst, dass *MaxMin* in *NP* liegt. (Hinweis: Dafür genügt es zu zeigen, dass mit einem deterministischen polynomiellen Algorithmus getestet werden kann, ob eine gegebene Menge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ die obige Bedingung erfüllt, d.h. $\sum_{i \in I} b_i \leq Max$ und $\sum_{i \in I} c_i \geq Min$.) (10%)
- (b) Übersetze jede Eingabe $w \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ von *Rucksack* in eine Eingabe $red(w) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von *MaxMin*, so dass die Übersetzung polynomiellen Zeitaufwand hat und folgende Korrektheitsaussage gilt:

$$Rucksack(a_1 \dots a_n, k) = T \text{ gdw. } MaxMin(red(a_1 \dots a_n, k)) = T.$$

Begründe, warum deine Übersetzung polynomiellen Zeitaufwand hat und beweise, dass sie die Korrektheitsaussage erfüllt. (20%)

2. Betrachte das *gewichtete Summenproblem GSP* mit den Eingaben $d_1 \dots d_m \in \mathbb{N}^*$ mit $d_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, m$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Ausgabe von *GSP* ist genau dann T , wenn eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ und eine Abbildung $weight: I \rightarrow \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\sum_{i \in I} weight(i) * d_i = k.$$

Übersetze jede Eingabe $w \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ von *GSP* in eine Eingabe $red(w) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ von *Rucksack*, so dass die Übersetzung polynomiellen Zeitaufwand hat und folgende Korrektheitsaussage gilt:

$$GSP(d_1 \dots d_n, k) = T \text{ gdw. } Rucksack(red(d_1 \dots d_n, k)) = T.$$

Beweise, dass deine Übersetzung die Korrektheitsaussage erfüllt. (20%)

3. Die Twinshuffle-Sprache *TS* über dem Alphabet $A = \{0, 1, \bar{0}, \bar{1}\}$ ist definiert durch $TS = \{w \in A^* \mid read_{01}(w) = read_{\bar{0}\bar{1}}(w)\}$, wobei für alle $w \in A^*$ und alle $x \in \{0, 1\}$

$$read_{01}(\lambda) = \lambda, read_{01}(xw) = xread_{01}(w), read_{01}(\bar{x}w) = read_{01}(w), \\ read_{\bar{0}\bar{1}}(\lambda) = \lambda, read_{\bar{0}\bar{1}}(xw) = read_{\bar{0}\bar{1}}(w) \text{ und } read_{\bar{0}\bar{1}}(\bar{x}w) = xread_{\bar{0}\bar{1}}(w).$$

Entwirf eine Grammatik für die Sprache *TS*. (20%)

4. Für eine kontextfreie Grammatik $G = (N, T, P, S)$ heißt eine Regel $(A ::= w) \in P$ *wohlgeformt*, falls $w \in T$ oder $w \in N^*$ mit $length(w) \geq 2$.

(a) Entwirf ein Verfahren, das aus einer beliebigen kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik G' mit ausschließlich wohlgeformten Regeln erzeugt, derart dass $L(G') = L(G)$. Dabei kann angenommen werden, dass G keine λ -Produktionen und keine Kettenregeln enthält. (20%)

(b) Veranschauliche deine Konstruktion an der Beispielgrammatik $(\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Regeln $S ::= Ab \mid Ba, A ::= AbA \mid aS \mid a, B ::= BBa \mid b \mid ASA$. (10%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Zeit zwischen dem 09.06. und dem 15.06.09 in den Tutorien abzugeben.