Unlösbarkeit des Wortproblems für Typ-0-Sprachen

Theorem

Das Wortproblem für Typ-0-Sprachen ist nicht berechenbar (z.B. durch eine CE-S-Spezifikation, eine Turing-Maschine oder ein WHILE-Programm).

Beweis der Unlösbarkeit mittels Reduktion

Reduktion

Seien $dp_i\colon A_i \to BOOL$ $(i = 1, 2)$ Entscheidungsprobleme.

dp_1 ist auf dp_2 **reduzierbar**, falls es eine berechenbare Funktion $red\colon A_1^* \to A_2^*$ gibt, so dass

$$dp_1(w) = T \Longleftrightarrow dp_2(red(w)) = T \text{ für alle } w \in A_1^*.$$

Beweis der Unlösbarkeit mittels Reduktion

Theorem

dp ist nicht berechenbar.

Beweis

Wähle ein anderes Entscheidungsproblem dp_0, dessen Unlösbarkeit bereits bekannt ist.

Reduziere dp_0 auf dp.

Unlösbarkeit des Halteproblems

Halteproblem

- Eingabe: Turingmaschine TM, Wort w [1)]
- Ausgabe: T, falls TM bei Eingabe w anhält
  F sonst.

Theorem

Das Halteproblem ist nicht berechenbar.

1) (TM, w) kann eindeutig als Wort kodiert werden.

Unlösbarkeit des Wortproblems für Typ-0-Sprachen

Beweisidee: Reduziere das Halteproblem (HP) auf das Wortproblem (WP).

Beweisskizze: Sei $red(TM, w) = (TM', w)$, wobei TM' wie folgt arbeitet:

1. Simuliere TM mit Eingabe w.
2. Gehe in einen Endzustand.

1. red ist berechenbar.
2. $\mathrm{HP}(TM, w) = T \Longleftrightarrow \mathrm{WP}(TM', w) = T$.

Leerheitsproblem

- Leerheitsproblem von $L \subseteq T^*$: es ist zu entscheiden, ob $L = \emptyset$.
- Leerheitsproblem $LP(G)$ einer Grammatik G ist Leerheitsproblem von $L(G)$.

Typ	Bezeichnung	Automaten	Leerheitsproblem
0	allgemein	Turing-Maschinen	-
1	kontext-sensitiv, monoton	linear beschränkte Automaten	-
2	kontextfrei	Kellerautomaten	vgl. Übungsblatt 5
3	regulär, rechtslinear	endliche Automaten	+

Durchschnittsleerheitsproblem (DLP)

- Gegeben: L, L'.
- Es ist zu entscheiden, ob $L \cap L' = \emptyset$

Komplement von DLP ($\overline{DLP}$)

- Gegeben: L, L'.
- Es ist zu entscheiden, ob $L \cap L' \neq \emptyset$

Unlösbarkeit von DLP

Theorem

$\overline{DLP}$ nicht berechenbar $\Longrightarrow$ DLP nicht berechenbar.
(Verallgemeinerbar auf beliebige Entscheidbarkeitsprobleme)

Theorem

DLP ist für kontextfreie Sprachen nicht berechenbar.
Beweisidee: Reduktion des Postschen Korrepondenzproblems auf $\overline{DLP}$

Postsches Korrespondenzproblem (PCP)

- Eingabe: $(u_1, \dots, u_n)$,$(v_1, \dots, v_n)$ mit $u_i, v_i \in T^*$.
- Ausgabe: T, falls $i_1 \cdots i_k$ mit $k \geq 1$ existiert,
  so dass $u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$.
  F sonst.

Theorem

Das Postsche Korrespondenzproblem ist nicht berechenbar (für $\emptyset \neq T \neq \{a\}$).

Typ	Bezeichnung	Automaten	Durchschnittsleerheitsproblem
0	allgemein	Turing-Maschinen	-
1	kontextsensitiv, monoton	linear beschränkte Automaten	-
2	kontextfrei	Kellerautomaten	-
3	regulär, rechtslinear	endliche Automaten	$+$

Entscheidungsprobleme als Sprachen

$$dp\colon A^* \to BOOL \quad \rightsquigarrow \quad L_{dp} = \{w \in A^* \mid dp(w) = T\}$$

Beispiel

$$L_{WP(G)} = L(G)$$

G: Chomsky-Grammatik.

Entscheidbare Sprache

Eine Sprache $L \subseteq A^*$ ist entscheidbar, falls das Wortproblem von L berechenbar ist.

Beispiel: $L(G)$, wobei $G = (N, T, P, S)$ eine monotone Grammatik ist.

Semi-entscheidbare Sprache

Eine Sprache $L \subseteq A^*$ ist semi-entscheidbar, falls die partielle Funktion $dp'_L\colon A^* \to BOOL$ mit

$$dp'_L(w) = \begin{cases} T, & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist.

Beispiel:

$$L_{PCP} = \{\ ((u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) \mid u_i, v_i \in T^*, \\ \exists i_1, \ldots, i_k\ (k \geq 1) : u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}\}$$

Entscheidbare und semi-entscheidbare Probleme

Ein Problem dp ist entscheidbar, falls es berechenbar ist.

Beispiel: Wortproblem für monotone Grammatiken

Ein Problem dp ist semi-entscheidbar, falls L_{dp} semi-entscheidbar ist.

Beispiel: PCP