Matrizenmultiplikation (klassisch)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix} \text{mit } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \text{ für}$$

$$i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, p$$

Aufwand der klassischen Matrizenmultiplikation

- Annahme: $m = p = n$
- Gezählte Operationen: Add: Additionen
  $Mult$: Multiplikationen

$$\boxed{\begin{aligned} T_{Mult}^{klassisch}(n) &= n^2 \cdot n = n^3 \\ T_{Add}^{klassisch}(n) &= n^2 \cdot (n-1) = n^3 - n^2 \end{aligned}}$$

Algorithmus von Winograd

- Ziel: Reduktion der Anzahl der Multiplikationen
- Grundüberlegung: $wx + yz = (w+z)(y+x) - wy - xz$
- A, B : (n, n)-Matrizen mit $n = 2m$
- Berechnung von $C = A \circ B$:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (a_{i(2j-1)} + b_{(2j)k}) \cdot (a_{i(2j)} + b_{(2j-1)k}) - W(A_i) - W(B^k)$$

- $W(A_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{i(2j-1)} \cdot a_{i(2j)}$
- $W(B^k) = \sum_{j=1}^{m} b_{(2j-1)k} \cdot b_{(2j)k}$

Aufwand des Algorithmus von Winograd

$$T_{Mult}^{Winograd}(n) = \frac{1}{2}\,n^3 + n^2$$

$$T_{Add}^{Winograd}(n) = \frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$$

Algorithmus von Strassen (für (2,2)-Matrizen)

$s_1 = a_{21} + a_{22}$ $\quad s_2 = s_1 - a_{11}$ $\quad s_3 = a_{11} - a_{21}$

$s_4 = a_{12} - s_2$ $\quad s_5 = b_{12} - b_{11}$ $\quad s_6 = b_{22} - s_5$

$s_7 = b_{22} - b_{12}$ $\quad s_8 = s_6 - b_{21}$

$m_1 = s_2 \cdot s_6$ $\quad m_2 = a_{11} \cdot b_{11}$ $\quad m_3 = a_{12} \cdot b_{21}$

$m_4 = s_3 \cdot s_7$ $\quad m_5 = s_1 \cdot s_5$ $\quad m_6 = s_4 \cdot b_{22}$

$m_7 = a_{22} \cdot s_8$

$t_1 = m_1 + m_2$ $\quad t_2 = t_1 + m_4$ $\quad t_3 = t_1 + m_5$

$c_{11} = m_2 + m_3$ $\quad c_{21} = t_2 - m_7$ $\quad c_{12} = t_3 + m_6$

$c_{22} = t_2 + m_5$

Aufwand

$$T_{Mult}^{Strassen}(2) = 7$$

$$T_{Add}^{Strassen}(2) = 15$$

Fortführung auf $(2^k, 2^k)$-Matrizen

- A_{ij}, B_{ij}: $(2^{k-1}, 2^{k-1})$-Matrizen für $i, j \in \{1, 2\}$ und $k > 1$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11} \circ B_{11} + A_{12} \circ B_{21}, \\ C_{12} &= A_{11} \circ B_{12} + A_{12} \circ B_{22} \\ C_{21} &= A_{21} \circ B_{11} + A_{22} \circ B_{21}, \\ C_{22} &= A_{21} \circ B_{12} + A_{22} \circ B_{22} \end{aligned}$$

Aufwand

$$T_{Mult}^{Strassen}(n) = n^{\mathrm{ld}7}$$

$$T_{Add}^{Strassen}(n) = 5n^{\mathrm{ld}7} - 5n^2$$

mit $n = 2^k$ und $k \geq 1$.

Aufwandsvergleich der Matrizenmultiplikations-Algorithmen (Multiplikationen)

n	klassisch: n^3	Winograd: $\frac{1}{2}n^3 + n^2$	Strassen: $n^{2,81}$
8	512	320	345
64	262 144	135 168	118 950
256	16 777 216	8 454 144	5 849 979
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$