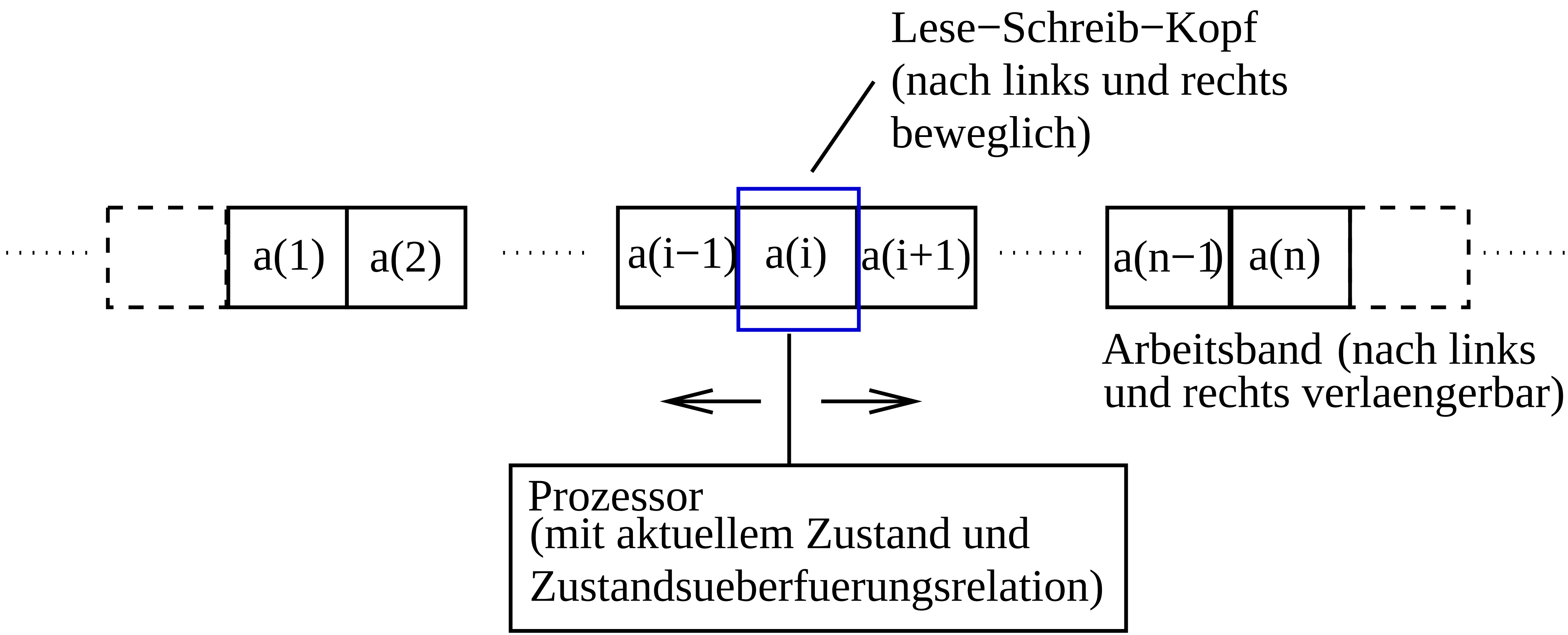
Turingmaschinen

- Von Alan Turing in den 30er Jahren dieses Jahrhunderts eingeführt
- Eines der ältesten Berechenbarkeitsmodelle
  Idee: den mechanischen Anteil des Rechnens mit Bleistift und Radiergummi auf Papier formal fassen.
- Grundlage für zahlreiche Beweise in der Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie

Bestandteile

- Prozessor (mit aktuellem Zustand und Zustandsüberführungrelation)
- Arbeitsband (nach links und rechts verlängerbar)
- Leseschreibkopf (nach links und rechts beweglich)

Graphische Veranschaulichung

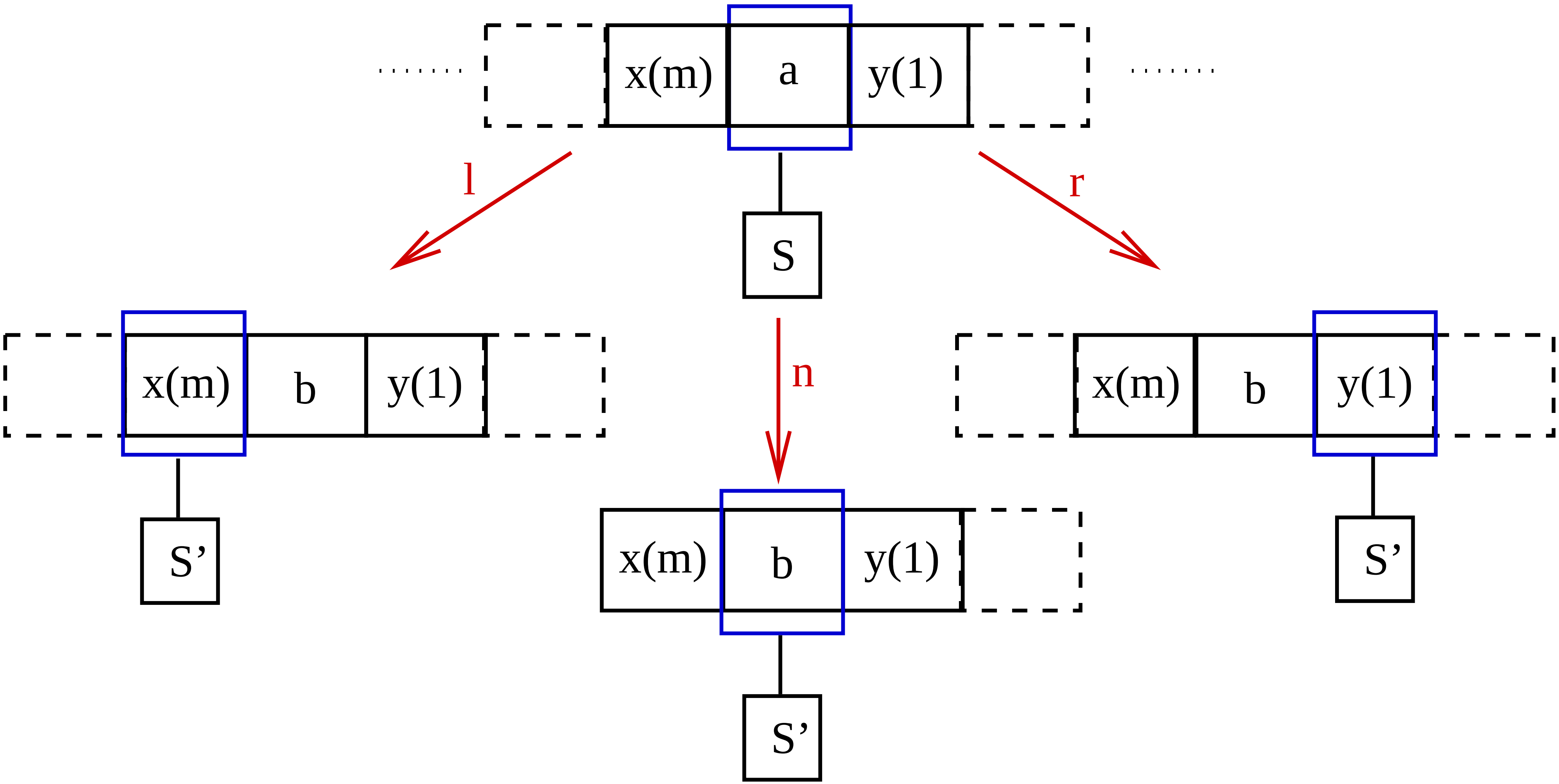


Arbeitsweise

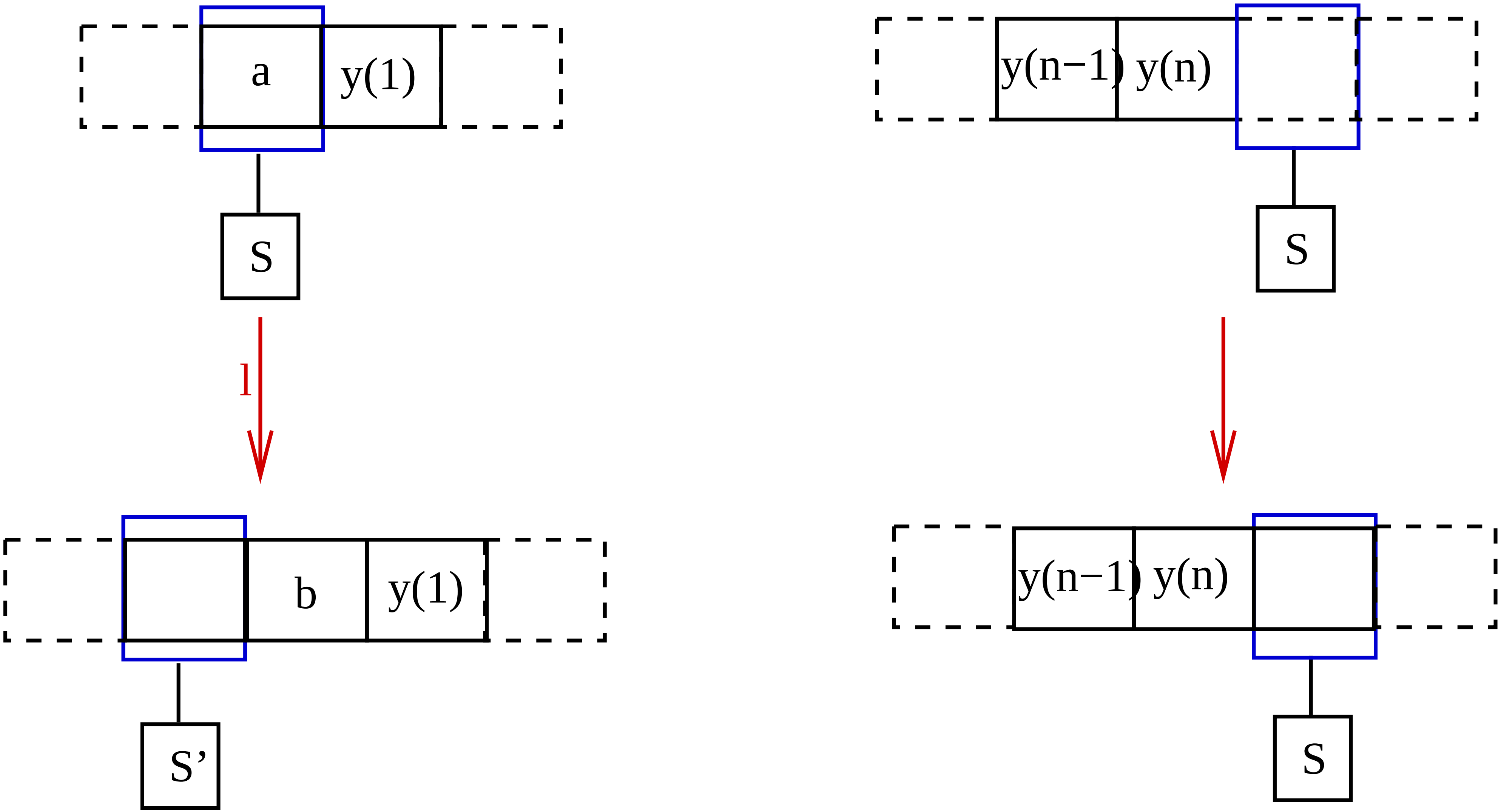
Lesen von a im aktuellen Zustand s bewirkt

- Schreiben von b,
- neuen Zustand s' und
- Kopfbewegung laut Zustandsüberführung.

Graphische Veranschaulichung (1)



Graphische Veranschaulichung (2)



Turingmaschine: Formale Definition

$TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ mit

- S: endliche Menge von Zuständen,
- I: endliches Eingabealphabet,
- A: endliches Bandalphabet mit $I \subseteq A$ und $\Box \in A \setminus I$, ($\Box$ steht für leeres Feld.)
- d: Zustandsüberführungsrelation mit $d(s, a) \subseteq S \times A \times \{l, r, n\}$ für alle $s \in S$, $a \in A$,
- $s_0 \in S$: Anfangszustand,
- $F \subseteq S$: Menge von Endzuständen.

Konfigurationen

Konfiguration: usv mit $s \in S$, $u, v \in A^*$

Anfangskonfiguration: $\lambda s_0 w$ mit $w \in I^*$

Folgekonfiguration

Folgekonfiguration

Für alle $s, s' \in S$, $u, v \in A^*$ und $a, b, c \in A$:

$$
\begin{array}{ll}
usav \vdash\!\!\!\!\!- us'bv \;, & \text{falls } (s', b, n) \in d(s, a) \\
usacv \vdash\!\!\!\!\!- ubs'cv \;, & \text{falls } (s', b, r) \in d(s, a) \\
\left.\begin{array}{l} ucsav \vdash\!\!\!\!\!- us'cbv \\ \lambda sav \vdash\!\!\!\!\!- s'\Box bv \end{array}\right\}, & \text{falls } (s', b, l) \in d(s, a) \\
us\lambda \vdash\!\!\!\!\!- us\Box &
\end{array}
$$

Konfigurationsfolge

$$\boxed{con = con_0 \vdash con_1 \vdash \cdots \vdash con_n = con'}$$

Dafür kurz: $con \overset{n}{\vdash} con'$ oder $con \overset{*}{\vdash} con'$

Erkannte Sprache

Sei $TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ eine Turingmaschine.
Dann ist $L(TM)$ die von TM erkannte Sprache mit

$$L(TM) = \{w \in I^* \mid s_0 w \overset{*}{\longmapsto} usv, s \in F\}$$

Turing-berechenbare Funktion

Eine (partielle) Funktion $f\colon I^* \to I^*$ wird von einer Turingmaschine TM **berechnet**, falls für alle $v, w \in I^*$ gilt:

$$f(w) = v \quad \text{gdw.} \quad \lambda s_0 w \stackrel{*}{\vdash} usv\Box^i$$

für geeignete $u \in A^*, s \in F$ und $i \in \mathbb{N}$.

Schreibweise: $f = f_{TM}$

Churchsche These

Die Menge der Turing-berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne berechenbaren Funktionen.

Varianten von Turing-Maschinen

- Turing-Maschinen mit mehreren Bändern
- Turing-Maschinen mit einseitig beschränktem Band
- Turing-Maschinen mit mehreren Leseköpfen
- Turing-Maschinen mit mehrdimensionalem Arbeitsband
- ...

Theorem

Turing-Maschinen sind genauso mächtig wie ihre Varianten.

Turingmaschinen mit mehreren Bändern

Turingmaschine mit k Bändern

$$TM = (S, I, A, d, s_0, F)$$

- $d(s, a_1, \ldots, a_k) \subseteq S \times A^k \times \{l, r, n\}^k$ für alle $s \in S$ und alle $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$,
- alle weiteren Komponenten wie bei (Einband-) Turingmaschinen.

Konfigurationen

Konfiguration: $u_1 s v_1, \ldots, u_k s v_k$ mit $s \in S$, $u_j, v_j \in A^*$ $(j = 1, \ldots, k)$

Anfangskonfiguration: $\lambda s_0 w, s_0, \ldots, s_0$ mit $w \in I^*$

Folgekonfiguration

Falls $(s', b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_k) \in d(s, a_1, \ldots, a_k)$:

$$u_1 s a_1 v_1, \ldots, u_k s a_k v_k \longmapsto u'_1 s' v'_1, \ldots, u'_k s' v'_k,$$

wobei man $u'_j s' v'_j$ aus $u_j s a_j v_j$ wie folgt erhält:

1. Überschreibe a_j durch b_j.
2. Ersetze s durch s'.
3. Verschiebe s' gemäß x_j.

Erkannte Sprache

Sei $TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ eine Turingmaschine mit k Bändern.

Dann ist $L(TM)$ die von TM erkannte Sprache mit

$$L(TM) = \{w \in I^* \mid s_0 w, s_0, \ldots, s_0 \overset{*}{\vdash} u_1 s v_1, \ldots, u_k s v_k, s \in F\}$$

Äquivalenz zwischen Mehrband-Turingmaschinen und Turingmaschinen

Theorem

Mehrband-Turingmaschinen erkennen dieselben Sprachen wie (Einband)-Turingmaschinen.

Beweisskizze: Sei $TM(k)$ eine Turingmaschine mit $k > 1$ Bändern. Simuliere $TM(k)$ wie folgt:

1. Schreibe alle k Eingabewörter nebeneinander auf das Arbeitsband, so dass
   - sie durch besondere Symbole getrennt sind
   - die Position der Leseköpfe mittels spezieller Symbole kodiert wird.
2. Führe nacheinander an den markierten Stellen die Aktionen von $TM(k)$ aus. (Dafür muss evtl. durch Verschieben des Bandinhalts Platz geschaffen werden.)

Äquivalenz zwischen deterministischen und nichtdeterministischen Turingmaschinen

Deterministische Turingmaschine

TM ist deterministisch, falls $d(s, a)$ für jedes $s \in S$ und $a \in A$ höchstens ein Element enthält.

Theorem

Nichtdeterministische Turingmaschinen erkennen dieselben Sprachen wie deterministische Turingmaschinen.

Beweisskizze: Sei $TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ eine nichtdeterministische Turingmaschine. Sei

$$k = max\,\{|d(s,a)| \mid s \in S, a \in A\}.$$

Simuliere TM durch eine deterministische Turingmaschine mit 3 Bändern:

1. Schreibe die Eingabe von TM auf das erste Band.
2. Erzeuge auf Band 2 nach und nach alle Wörter über $\{1, \ldots, k\}$.
3. Kopiere für jedes Wort u auf Band 2 die Eingabe auf Band 3 und simuliere TM unter Benutzung der Zahlenfolge in u.

Turingmaschinen und Typ-0-Sprachen

Theorem

Die von Turingmaschinen erkannten Sprachen sind genau die Typ-0-Sprachen.

Übersetzung von Chomsky-Grammatiken in Turingmaschinen

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine Chomsky-Grammatik. Dann arbeitet $TM(G)$ wie folgt:

1. Wähle eine Regel $u ::= v \in P$.
2. Ersetze ein beliebiges Vorkommen von v im aktuellen Bandinhalt w durch u, falls v in w vorkommt. (Ist $|u| \neq |v|$ müssen Teile von w verschoben werden.)
3. Ist S der aktuelle Bandinhalt, gehe in einen Endzustand; sonst gehe zu 1.

Korrektheit der Übersetzung

Theorem

$$L(G) = L(TM(G))$$

Übersetzung von Turingmaschinen in Typ-0-Grammatiken

Sei $TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ eine Turingmaschine. Dann enthält $G(TM) = (N, I, P, S')$ die folgenden Regeln:

1. Regeln, die aus S' Wörter der Form

$$\$s_0w\#w \text{ mit } w \in I^*, \$, \# \notin A$$

   erzeugen.
2. Regeln, die $\$s_0w\#w$ in $\$usv\#w$ umwandeln, falls $s_0w \overset{*}{\vdash} usv$.
3. Regeln, die $\$usv\#w$ in w umwandeln, falls $s \in F$.

Definition der Regeln von $G(TM)$

1. Regeln für $S' \xrightarrow{*} \$s_0w\#w$: (vgl. Übung)
2. Regeln für $\$s_0w\#w \xrightarrow{*} \$usv\#w$:
   - Falls $(b, s', l) \in d(s, a)$:

     $$csa ::= s'cb \text{ für alle } c \in A$$
     $$\$sa ::= \$s'\Box b$$

   - weitere Fälle analog.
3. Regeln für $\$usv\#w \xrightarrow{*} w$:
   - $s ::= L$, $Lc ::= L$, $cL ::= L$, $\$L\# ::= \lambda$
     (mit $s \in F$, $c \in A$)

Korrektheit der Übersetzung

Theorem

$$L(TM) = L(G(TM))$$

Linear beschränkte Turingmaschine

- Benutzt nur den Platz, auf dem die Eingabe steht.
- Erkennt Randfelder durch spezielle Symbole.
- Markierung des linken Randfelds gleich nach dem Start.
- Eingabealphabet: $I \cup \hat{I}$ mit $\hat{I} = \{\hat{x} \mid x \in I\}$.
- Startkonfigurationen haben die Form: $s_0 w \hat{x}$ mit $w \in I^*$ und $\hat{x} \in \hat{I}$.
- λ kann nicht erkannt werden.

Definition

Linear beschränkte Turingmaschine

Eine Turingmaschine $TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ heißt **linear beschränkt**, falls für alle $w \in I^*$, $u, v \in A^*$, $s \in S$ gilt:

$$s_0 w \overset{*}{\vdash} usv \Longrightarrow |w| = |uv|.$$

Erkannte Sprache

Die von einer linear beschränkten Turingmaschine $TM = (S, I, A, d, s_0, F)$ erkannte Sprache ist definiert durch

$$\{wx \mid w \in I^*, x \in I, s_0 w\hat{x} \vdash^* usv,\ s \in F\}.$$

Theorem

Die von linear beschränkten Turingmaschinen erkannten Sprachen sind genau die monotonen Sprachen.

Offenes Problem

Können deterministische linear beschränkte Turingmaschinen dieselben Sprachen erkennen wie nichtdeterministische linear beschränkte Turingmaschinen?