

Theoretische Informatik 2

3. Übungsblatt

1. Betrachte die folgende Spezifikation **quicksort** vom 2. Übungsblatt:

quicksort

opns: $qsort: A^* \rightarrow A^*$, $filter: A \times A^* \times BOOL \rightarrow A^*$

vars: $x, y: A$, $v: A^*$, $b: BOOL$

eqns: $qsort(\lambda) = \lambda$

$qsort(xv) = qsort(filter(x, v, T)) x qsort(filter(x, v, F))$

$filter(x, \lambda, b) = \lambda$

$filter(x, yv, b) = if (y \leq x) = b then y filter(x, v, b) else filter(x, v, b)$

(a) Zeige, dass die Auswertung von $qsort(w)$ für Eingabewörter w der Länge n , die falsch herum sortiert sind, mindestens $n^2 + 3n$ Schritte braucht. Dabei ist ein Wort w falsch herum sortiert, falls für jedes Zeichen x in w alle nachfolgenden kleiner als x sind. (20%)

(b) Benötigt die Auswertung von $qsort(w)$ mindestens ebenso viele Schritte, wenn $is-sorted(w) = T$ gilt? (Die Operation $is-sorted$ ist in Abschnitt 3.2. des Skripts definiert.) Begründe Deine Antwort; ein Beweis ist nicht gefordert. (5%)

2. Für Funktionen $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gilt $f \in O(g)$ genau dann, wenn Konstanten $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Schätze die folgenden Funktionen mit der Notation $O(g)$ ab, so dass g möglichst einfach und nah an der gegebenen Funktion gewählt ist.

(a) $f(n) = (n + 5)^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = \text{ld}(n^2 + 6)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $f(n) = (5n^2 + 2n + 8) \text{ld}(2 + 3n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (15%)

3. In der folgenden Tabelle entspricht jede der beiden Zeilen einem Problem, für das zwei CE-S-Operationen A und B existieren. Die Einträge entsprechen $T^A(n)$ und $T^B(n)$. Bestimme für jedes Problem das kleinste n , so dass die Operation B schneller als A ist.

A	B
n^2	$572n + 4171$
$n!$	$3^n + 2$

(20%)

4. Zeige die folgenden Behauptungen:

- $O(g) \subseteq O(f)$, falls $g \in O(f)$. (10%)
- Sei $h_1(n) = f(n) + g(n)$ und $h_2(n) = \max(f(n), g(n))$. Dann gilt $O(h_1) \subseteq O(h_2)$. (10%)
- $O(2^n) \subseteq O(n!)$ (10%)
- $O(n!)$ ist nicht in $O(2^n)$ enthalten. (10%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 24.05.2010 in den Tutorien abzugeben.